

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2023 - 2024

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours –

- 1) Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable. Rappeler la définition d'une sous-tribu \mathcal{A} de \mathcal{F} .
- 2) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire. Que signifie « X est \mathcal{A} -mesurable » où \mathcal{A} est une sous-tribu de \mathcal{F} .
- 3) Donner la définition de la convergence presque-sûre.

Exercice 1 – Soit (X, Y) un vecteur aléatoire défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

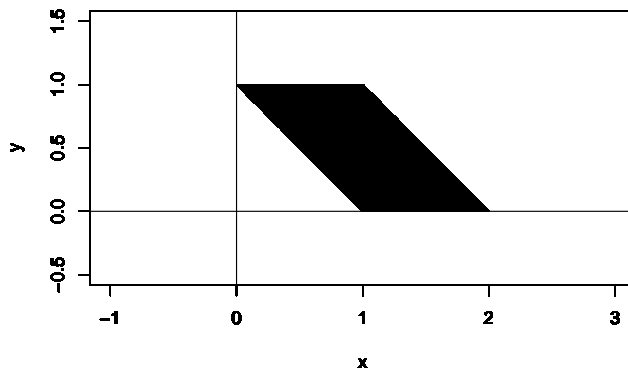
On suppose que la loi de (X, Y) est absolument continue de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cy\mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

où $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 1 \leq x + y \leq 2\}$ et c est une constante convenablement choisie.

- 1) Représentez l'ensemble Δ .

L'ensemble Δ est le losange en noir dans la figure ci-dessous.



- 2) Préciser la valeur de c .

Il faut évidemment avoir $c > 0$. De plus

$$\int f_{(X,Y)}(x,y) dx dy = c \int_0^1 \int_{1-y}^{2-y} y dx dy = c \int_0^1 y dy = \frac{c}{2}.$$

Il faut donc prendre $c = 2$.

- 3) Quelle est la densité de la loi de Y ?

Il faut intégrer la densité jointe par rapport à x . Ainsi,

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x,y) dx = 2y \mathbb{I}_{[0,1]}(y) \int_{-y}^{1-y} dx = 2y \mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

On peut vérifier f_Y est une fonction positive d'intégrale égale à 1.

- 4) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

On a

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}.$$

- 5) Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X | Y)$.

Pour tout $y \in [0, 1]$, la densité conditionnelle de X sachant Y est

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{2y}{2y} \mathbb{I}_{[1-y, 2-y]}(x) = \mathbb{I}_{[1-y, 2-y]}(x).$$

Ainsi, $\mathbb{E}(X | Y) = h(Y)$ avec

$$h(y) = \int_{1-y}^{2-y} x dx = \frac{1}{2} [x^2]_{1-y}^{2-y} = \frac{3-2y}{2}.$$

- 6) Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Il faut utiliser l'égalité $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X | Y)] = \mathbb{E}(X)$. On a

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \frac{3-2y}{2} \times f_Y(y) dy = \int_0^1 (3y - 2y^2) dy = \frac{5}{6}.$$

Exercice 2 – Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X et Y ont la même loi donnée pour tout $k \in E := \{0, \dots, 10\}$ par

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{11}.$$

- 1) Donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

La variable aléatoire X étant discrète, on a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{10} \frac{k}{11} = \frac{1}{11} \times \frac{10 \times 11}{2} = 5.$$

On pose $Z := \min(X, Y)$. On rappelle que pour toute fonction $g : E \rightarrow E$ mesurable

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \frac{1}{11^2} \sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} g(i, j).$$

On admettra que pour deux variables aléatoires indépendantes U et V , on a $\mathbb{E}(U | V) = \mathbb{E}(U)$.

- 2) Sans faire de calcul, quelle est la valeur de $\mathbb{E}(Z | X = 0)$? En utilisant la question 1), quelle est la valeur de $\mathbb{E}(Z | X = 10)$? Justifier vos réponses. Evidemment si l'événement $\{X = 0\}$ est réalisé alors Z vaut 0 et donc $\mathbb{E}(Z | X = 0) = 0$. De plus, si l'événement $\{X = 10\}$ est réalisé alors $Z = Y$ et donc $\mathbb{E}(Z | X = 10) = \mathbb{E}(Y | X = 10)$. De part l'indépendance entre Y et X , on en déduit que $\mathbb{E}(Z | X = 10) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) = 5$.
- 3) Pour tout $k \in E$, donner l'expression de $\mathbb{E}(Z | X = k)$ en fonction de k . D'après le cours,

$$\mathbb{E}(Z | X = k) = \frac{1}{\mathbb{P}(X = k)} \mathbb{E} [Z \mathbb{I}_{\{k\}}(X)] = 11 \times \mathbb{E} [\min(X, Y) \mathbb{I}_{\{k\}}(X)].$$

En utilisant le rappel avec $g(u, v) = \min(u, v) \mathbb{I}_{\{k\}}(u)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\min(X, Y) \mathbb{I}_{\{k\}}(X)] &= \frac{1}{11^2} \sum_{i=0}^{10} \sum_{j=0}^{10} \min(i, j) \mathbb{I}_{\{k\}}(j) = \frac{1}{11^2} \sum_{i=0}^{10} \min(i, k) \\ &= \frac{1}{11^2} \left(\sum_{i=0}^{k-1} i + \sum_{i=k}^{10} k \right) = \frac{1}{11^2} \left(\frac{k(k-1)}{2} + k(11-k) \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z | X = k) = \frac{k}{11} \left(\frac{k-1}{2} + 11 - k \right) = \frac{k(21-k)}{22}.$$

- 4) En déduire l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(Z | X)$. D'après le cours,

$$\mathbb{E}(Z | X) = \sum_{k=0}^{10} \frac{k(21-k)}{22} \mathbb{I}_{\{k\}}(X).$$

Exercice 3 – Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On suppose que pour tout $n \geq 1$, la loi de X_n est donnée pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ par $\mathbb{P}(X_n = k) = 1/(n+1)$.

- 1) Donner l'expression de la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire X_n . On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_n(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t)$.

Evidemment, si $t < 0$, on a $F_n(t) = 0$. De plus, si $t \geq n$, on a $F_n(t) = 1$. Enfin, si $t \in [0, n[$,

$$F_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor t \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{n + 1}.$$

- 2) Montrer que X_n/n converge en loi vers une loi uniforme sur $[0, 1]$.
D'après la question précédente, on obtient facilement que

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq t\right) = F_n(nt) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ (\lfloor nt \rfloor + 1)/(n + 1) & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Il reste simplement à remarquer que $(\lfloor nt \rfloor + 1)/(n + 1) \rightarrow t$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- 3) Soit $a > 1$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n^a} > \varepsilon\right) = \frac{n - \lfloor n^a \varepsilon \rfloor}{n + 1},$$

si $n < \varepsilon^{1/(1-a)}$ et 0 sinon.

On remarque tout d'abord que

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n^a} > \varepsilon\right) = 1 - F_n(n^a \varepsilon).$$

On a $n^a \varepsilon > 0$ et $F_n(n^a \varepsilon) = 1$ si $n^a \varepsilon \geq n$ autrement dit si $\varepsilon \geq n^{1-a}$ ou encore, puisque $1 - a < 0$, si $n \geq \varepsilon^{1/(1-a)}$. Enfin, si $n^a \varepsilon < n$ i.e., si $n < \varepsilon^{1/(1-a)}$,

$$F_n(n^a \varepsilon) = \frac{\lfloor n^a \varepsilon \rfloor + 1}{n + 1}.$$

On en déduit le résultat.

- 4) Qu'en déduisez vous quant à la convergence presque-sûre de X_n/n^a lorsque $a > 1$?

D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n^a}\right| > \varepsilon\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n^a} > \varepsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\lceil \varepsilon^{1/(1-a)} \rceil} \frac{n - \lfloor n^a \varepsilon \rfloor}{n + 1} < \infty.$$

En utilisant le corollaire du Lemme de Borel-Cantelli, on a donc montré la convergence presque-sûre de X_n/n^a vers 0 lorsque $a > 1$.