Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2024 - 2025

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1) Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Rappeler la définition de la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X.

On suppose dans la suite de l'exercice que X est la variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$ (i.e., pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$) et que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

2) Quelle est la fonction de répartition de X ?
3) Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la limite, lorsque $n \to \infty$ des probabilités $\mathbb{P}(X_n > a+\varepsilon)$ et $\mathbb{P}(X_n < a-\varepsilon)$?
4) En déduire que si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Exercice 2 – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x/2 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1) Calculer l'espérance de X. On rappelle que si X est une variable aléatoire positive,
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(t))\, dt.$$
2) Quelle est la fonction de répartition de $X_{n,n} := \max(X_1, \ldots, X_n)$?

L'objectif des questions 3) à 6) est de montrer de différentes façons que $X_{n,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

3) Montrer que $(X_{n,n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire constante égale à 1. Conclure quant à la convergence en probabilité.
4) Donner en fonction de n les expressions de $\mathbb{E}(X_{n,n})$ et $\mathrm{Var}(X_{n,n})$. Conclure quant à la convergence en probabilité.
5) En utilisant une inégalité de Markov, montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}\left(|X_{n,n} - 1| > \varepsilon\right) \leq \frac{2^{-n}}{(n+1)\varepsilon}.$$
Conclure quant à la convergence en probabilité.
6) Pour $\varepsilon > 0$, donner l'expression, en fonction de n et ε, de la probabilité $\mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| \geq \varepsilon)$. Conclure quant à la convergence en probabilité.
7) Peut on affirmer que $(X_{n,n})_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers 1 ?

Exercice 3 – Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi absolument continue dont la densité est la fonction

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}\,(x^2 - xy + y^2)\right).$$

1) Montrer que $x^2 - xy + y^2 = (x - g(y))^2 + 3y^2/4$ où vous préciserez l'expression de la fonction $g(\cdot)$.

Le reste de l'exercice peut être effectué en donnant les résultats en fonction de $g(\cdot)$. On rappelle aussi que la densité d'une loi normale de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$ est

$$h(x; \mu, \sigma^2) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

2) Quelle est la densité de Y. Quelle loi reconnaissez vous ?

3) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, donner l'expression de la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$. Quelle loi reconnaissez vous ?

4) Quelle est l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \mid Y)$?

Exercice 4 – On considère la variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ avec $E = \{1/3, 1/2, 1\}$. La loi de Y est donnée par $\mathbb{P}(Y = 1/i) = 1/i$ pour $i \in \{2, 3\}$.

1) Donner les valeurs de $\mathbb{P}(Y = 1)$ et de $\mathbb{E}(Y)$.

Soient $\{X_i,\ i \in \{1, 2, 3\}\}$ des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre $1/i$ que l'on supposera indépendantes de Y. On pose

$$Z = \sum_{i=1}^{3} X_i \mathbb{I}\{Y = 1/i\}.$$

2) Quelles sont les valeurs prises par la variable Z ? Calculer l'espérance de Z.

3) Donner l'expression de $\mathbb{E}(Z \mid Y)$.

4) En déduire que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(1/Y)$.