

Contrôle continu #2 de Probabilités

Correction

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

- 1) Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Rappeler la définition de la convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers X .

On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X si pour toute fonction continue et bornée g , on a $\mathbb{E}(g(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(g(X))$.

On suppose dans la suite de l'exercice que X est la variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$ (i.e., pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$) et que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X .

- 2) Quelle est la fonction de répartition de X ?

La fonction de répartition de X est $F(\cdot) := \mathbb{P}(X \leq \cdot)$ avec $F(x) = 0$ si $x < a$ et $F(x) = 1$ si $x \geq a$.

- 3) Pour $\varepsilon > 0$, quelle est la limite, lorsque $n \rightarrow \infty$ des probabilités $\mathbb{P}(X_n > a + \varepsilon)$ et $\mathbb{P}(X_n < a - \varepsilon)$?

Notons F_n la fonction de répartition de X_n . On a $\mathbb{P}(X_n > a + \varepsilon) = 1 - F_n(a + \varepsilon) \rightarrow 0$ car $a + \varepsilon$ est un point de continuité de F et que $F(a + \varepsilon) = 1$. De même, $\mathbb{P}(X_n < a - \varepsilon) \leq F_n(a - \varepsilon) \rightarrow 0$.

- 4) En déduire que si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > a + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < a - \varepsilon) \rightarrow 0,$$

d'après la question précédente.

Exercice 2 – Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi qu'une variable aléatoire X de fonction de répartition

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x/2 & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

- 1) Calculer l'espérance de X . On rappelle que si X est une variable aléatoire positive,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(t)) dt.$$

En utilisant le rappel, on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

- 2) Quelle est la fonction de répartition de $X_{n,n} := \max(X_1, \dots, X_n)$?

Par indépendance des X_i et en utilisant le fait qu'elles ont même loi, on a

$$\mathbb{P}(X_{n,n} \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x\}\right) = F^n(x).$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n,n} \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ (x/2)^n & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

L'objectif des questions 3) à 6) est de montrer de différentes façons que $X_{n,n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

- 3) Montrer que $(X_{n,n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire constante égale à 1. Conclure quant à la convergence en probabilité.

Il suffit de remarquer que lorsque $x \in [0, 1[$, on a $(x/2)^n \rightarrow 0$. Ainsi, lorsque $x < 1$, $\mathbb{P}(X_{n,n} \leq x) \rightarrow 0$ et, quand $x \geq 1$, $\mathbb{P}(X_{n,n} \leq x) \rightarrow 1$ ce qui montre la convergence en loi vers une variable aléatoire constante égale à 1. En utilisant l'exercice précédent, on en déduit la convergence en probabilité.

- 4) Donner en fonction de n les expressions de $\mathbb{E}(X_{n,n})$ et $\text{Var}(X_{n,n})$. Conclure quant à la convergence en probabilité.

En utilisant le rappel, on a

$$\mathbb{E}(X_{n,n}) = \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^n\right) dx = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

De plus, on a pour $x \in [0, 1[$ que $\mathbb{P}(X_{n,n}^2 \leq x) = \mathbb{P}(X_{n,n} \leq \sqrt{x})$ et donc

$$\mathbb{P}(X_{n,n}^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2^{-n/2}(x/2)^{n/2} & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

En s'inspirant du calcul précédent, on en déduit que

$$\mathbb{E}(X_{n,n}^2) = 1 - \frac{1}{(n/2 + 1)2^n}.$$

En conclusion, $\mathbb{E}(X_{n,n}) \rightarrow 1$ et $\text{Var}(X_{n,n}) \rightarrow 0$ puisque $\mathbb{E}(X_{n,n}^2) \rightarrow 1$. En utilisant un résultat du cours, on en déduit la convergence en probabilité vers 1.

- 5) En utilisant une inégalité de Markov, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| > \varepsilon) \leq \frac{2^{-n}}{(n+1)\varepsilon}.$$

Conclure quant à la convergence en probabilité.

Il suffit d'utiliser l'inégalité de Markov avec le moment d'ordre 1 :

$$\mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_{n,n} - 1|)}{\varepsilon} = \frac{1 - \mathbb{E}(X_{n,n})}{\varepsilon},$$

puisque $X_{n,n} \leq 1$ presque sûrement. En utilisant la question précédente, on en déduit le résultat.

- 6) Pour $\varepsilon > 0$, donner l'expression, en fonction de n et ε , de la probabilité $\mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| \geq \varepsilon)$. Conclure quant à la convergence en probabilité.

Puisque $X_{n,n} \leq 1$ presque sûrement,

$$\mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_{n,n} \leq 1 - \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon > 1, \\ \{(1 - \varepsilon)/2\}^n & \text{si } \varepsilon \in]0, 1]. \end{cases}$$

On remarque facilement que $\mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ ce qui conclut la démonstration de la convergence en probabilité.

- 7) Peut-on affirmer que $(X_{n,n})_{n \geq 1}$ converge presque-sûrement vers 1 ?

Pour $\varepsilon > 1$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| \geq \varepsilon) = 0 < \infty,$$

et pour $\varepsilon \in]0, 1]$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_{n,n} - 1| \geq \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1 - \varepsilon}{2}\right)^n = \frac{(1 - \varepsilon)/2}{(1 - \varepsilon)/2} = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon} < \infty,$$

On en déduit la convergence presque-sûre vers 1 en utilisant le corollaire du Lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 3 – Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi absolument continue dont la densité est la fonction

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3} (x^2 - xy + y^2)\right).$$

- 1) Montrer que $x^2 - xy + y^2 = (x - g(y))^2 + 3y^2/4$ où vous préciserez l'expression de la fonction $g(\cdot)$.

On a

$$x^2 - xy + y^2 - 3y^2/4 = x^2 - xy + y^2/4 = (x - y/2)^2.$$

Ainsi, $g(y) = y/2$.

Le reste de l'exercice peut être effectué en donnant les résultats en fonction de $g(\cdot)$. On rappelle aussi que la densité d'une loi normale de moyenne μ et de variance $\sigma^2 > 0$ est

$$h(x; \mu, \sigma^2) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- 2) Quelle est la densité de Y . Quelle loi reconnaissez vous ?

La densité de Y est donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{2}{3} (x^2 - xy + y^2)\right) dx \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{2}{3} (x - g(y))^2\right) dx. \end{aligned}$$

Or, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} h(x; g(y), 3/4) dx = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x - g(y))^2}{2 \times 3/4}\right) dx = 1.$$

Ainsi,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) = h(x; 0, 1).$$

Donc Y suit une loi normale centrée et réduite .

- 3) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, donner l'expression de la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$. Quelle loi reconnaissez vous ?

D'après le cours, la densité conditionnelle est donnée par

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - g(y))^2}{2 \times 3/4}\right) = h(x; g(y), 3/4).$$

On reconnaît donc la loi normale de moyenne $g(y) = y/2$ et de variance $3/4$.

- 4) Quelle est l'expression de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X | Y)$?

D'après la question précédente, on a directement que $\mathbb{E}(X | Y) = g(Y) = Y/2$.

Exercice 4 – On considère la variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ avec $E = \{1/3, 1/2, 1\}$. La loi de Y est donnée par $\mathbb{P}(Y = 1/i) = 1/i$ pour $i \in \{2, 3\}$.

- 1) Donner les valeurs de $\mathbb{P}(Y = 1)$ et de $\mathbb{E}(Y)$.

On a évidemment que

$$\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 1/2) + \mathbb{P}(Y = 1/3) = 1.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1 - 1/2 - 1/3 = 1/6$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{19}{36}.$$

Soient $\{X_i, i \in \{1, 2, 3\}\}$ des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre $1/i$ que l'on supposera indépendantes de Y . On pose

$$Z = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbb{I}\{Y = 1/i\}.$$

- 2) Quelles sont les valeurs prises par la variable Z ? Calculer l'espérance de Z .

La variable Z prend des valeurs positives. Par linéarité de l'espérance et en utilisant l'indépendance entre les X_i et Y , on a

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}[X_i \mathbb{I}\{Y = 1/i\}] = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}(X_i) \mathbb{P}(Y = 1/i) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

- 3) Donner l'expression de $\mathbb{E}(Z | Y)$.

D'après le cours,

$$\mathbb{E}(Z | Y) = \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}(Z | Y = 1/i) \mathbb{I}\{Y = 1/i\}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z | Y = 1/i) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = 1/i)} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^3 X_j \mathbb{I}\{Y = 1/j\} \mathbb{I}\{Y = 1/i\} \right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = 1/i)} \mathbb{E}[X_i \mathbb{I}\{Y = 1/i\}] = \mathbb{E}(X_i) = i. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z | Y) = \sum_{i=1}^3 i \mathbb{I}\{Y = 1/i\} = \frac{1}{Y}.$$

- 4) En déduire que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(1/Y)$.

C'est évident puisque $\mathbb{E}[\mathbb{E}(Z | Y)] = \mathbb{E}(Z)$.