Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie

Année 2025 - 2026

Durée : 1h30. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Question de cours – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable.

1) Enoncer le lemme de Borel-Cantelli.

2) Donner la définition de la convergence en loi.

3) Donner les liens d'implication entre les quatre types de convergence vus en cours (en probabilité, presque-sûrement, en loi et dans L^p).

[La note attribuée à cette question prendra largement en compte la qualité de la rédaction.]

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la fonction de répartition de X_n est donnée par

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (n+1)^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1) <u>Calculer</u> l'espérance de X_n de deux façons différentes : i) en utilisant la densité de X_n et ii) en utilisant l'égalité

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_n > x)\,\mathrm{d}x.$$

2) Quelle est l'expression de la fonction de répartition de X_n^2 ?

3) Calculer la variance de X_n.

4) Conclure quant à la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

5) Quel est le nom usuel de la loi de X_n ?

On suppose à présent que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires <u>indépendantes</u>, le fonction de répartition de X_n étant la fonction F_n donnée en début d'énoncé.

6) Soit $\varepsilon \in]0,1]$. La série

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon),$$

est-elle convergente ?

On rappelle la seconde partie du lemme de Borel-Cantelli. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements indépendants et si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

7) Déduire de la question précédente que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on a

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}\{X_n > \varepsilon\}) = 1.$$

8) On note $\mathbb{Q}_+^\star$ l'ensemble des rationnels strictement positifs. Montrer que

$$\mathbb{P}(\{X_n \to 0\}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^\star} \overline{\lim}\{X_n > \varepsilon\}\right).$$

9) En déduire que $\mathbb{P}(\{X_n \to 0\}) = 0$. Conclure quant à la convergence presque-sûre de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ vers 0.

Exercice 2 – Soit E et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et indépendantes. On se place dans le cas où la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose enfin $Z = \mathbb{I}_{\{E\leq Y\}}$.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z \mid \{Y = k\})$ est la valeur au point k de la fonction de répartition de E.

2) Quelle est l'expression de la fonction mesurable $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(Z \mid Y) = h(Y)$?

3) En déduire l'expression de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour laquelle

$$\mathbb{P}(E \leq Y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k.$$

Dans toute la suite, on suppose que la fonction de répartition de E est

$$F(x) = \mathbb{P}(E \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - 2^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La variable aléatoire Y suit quant à elle une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

4) En utilisant les questions précédentes, donner l'expression de la fonction mesurable $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(E \leq Y) = g(\lambda)$.

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune la loi de E. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune une loi de Poisson de paramètre 2. Les suites $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes. On note S_n le nombre d'indices i dans l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ pour lesquels l'événement $\{E_i \leq Y_i\}$ est réalisé.

5) Etudier la convergence presque-sûre de S_n/n.

Exercice 3 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c\frac{\exp(-y^2/2)}{y} \exp\left(-\frac{x}{y}\right) \mathbb{I}_\Delta(x, y),$$

où $c > 0$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y\}$. On note f_Y la densité de Y.

1) Donner l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de c.

2) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité ? On rappelle que pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}x = \sigma \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}.$$

3) Donner la fonction $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = h(Y)$.