

Contrôle continu #2 de Probabilités

Troisième année de la double Licence Mathématiques et Economie
Année 2025 - 2026

CORRECTION

Exercice 1 – Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la fonction de répartition de X_n est donnée par

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (n+1)^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- 1) Calculer l'espérance de X_n de deux façons différentes : i) en utilisant la densité de X_n et ii) en utilisant l'égalité

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X_n > x) dx.$$

Pour la première méthode, on a

$$f_n(x) = \ln(n+1)(n+1)^{-x} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \int_0^{\infty} x f_n(x) dx = \ln(n+1) \int_0^{\infty} x (n+1)^{-x} dx \\ &= \ln(n+1) \int_0^{\infty} x \exp(-x \ln(n+1)) dx. \end{aligned}$$

En posant $y = x \ln(n+1)$, il vient

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{\ln(n+1)} \int_0^{\infty} y \exp(-y) dy = \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

La seconde méthode donne

$$\mathbb{E}(X_n) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X_n > x) dx = \int_0^{\infty} \exp(-x \ln(n+1)) dx = \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

- 2) Quelle est l'expression de la fonction de répartition de X_n^2 ?
Si $x < 0$, on a évidemment $\mathbb{P}(X_n^2 \leq x) = 0$. Si $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_n^2 \leq x) = \mathbb{P}(X_n \leq x^{1/2}) = 1 - (n+1)^{-x^{1/2}}.$$

3) Calculer la variance de X_n .

On a

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \int_0^\infty (n+1)^{-x^{1/2}} dx = \int_0^\infty \exp(-x^{1/2} \ln(n+1)) dx.$$

En posant $y = x^{1/2} \ln(n+1)$, on a $\mathbb{E}(X_n^2) = 2/\ln^2(n+1)$.

Ainsi, $\text{Var}(X_n) = 1/\ln^2(n+1)$.

4) Conclure quant à la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

Comme $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 0$ et $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$, on a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

5) Quel est le nom usuel de la loi de X_n ?

Pour tout $n \geq 1$, la variable X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\ln(n+1)$.

On suppose à présent que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, la fonction de répartition de X_n étant la fonction F_n donnée en début d'énoncé.

6) Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. La série

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon),$$

est-elle convergente ?

On a pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$,

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\varepsilon} = +\infty.$$

La série est donc divergente.

On rappelle la seconde partie du lemme de Borel-Cantelli. Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'événements indépendants et si la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge, alors $\mathbb{P}(\overline{\lim} A_n) = 1$.

7) Dédurre de la question précédente que pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}\{X_n > \varepsilon\}) = 1.$$

Il suffit d'appliquer la seconde partie du lemme de Borel-Cantelli.

8) On note \mathbb{Q}_+^* l'ensemble des rationnels strictement positifs. Montrer que

$$\mathbb{P}(\{X_n \rightarrow 0\}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \overline{\lim}\{X_n > \varepsilon\}\right).$$

On rappelle que

$$\mathbb{P}(\{X_n \rightarrow 0\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \underline{\lim}\{X_n \leq \varepsilon\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} (\overline{\lim}\{X_n > \varepsilon\})^c\right).$$

L'intersection des complémentaires étant égal au complémentaire de l'union, on a

$$\mathbb{P}(\{X_n \rightarrow 0\}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \lim\{X_n \leq \varepsilon\}\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \overline{\lim}\{X_n > \varepsilon\}\right)^c\right),$$

qui est le résultat attendu.

- 9) En déduire que $\mathbb{P}(\{X_n \rightarrow 0\}) = 0$. Conclure quant à la convergence presque-sûre de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ vers 0. Il suffit de remarquer que

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \overline{\lim}\{X_n > \varepsilon\}\right) \leq 1 - \mathbb{P}(\overline{\lim}\{X_n > 1/2\}) = 0.$$

La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ ne converge donc pas presque-sûrement vers 0.

Exercice 2 – Soit E et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et indépendantes. On se place dans le cas où la variable aléatoire Y prend ses valeurs dans \mathbb{N} . On pose enfin $Z = \mathbb{I}_{\{E \leq Y\}}$.

- 1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z | \{Y = k\})$ est la valeur au point k de la fonction de répartition de E .

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z | \{Y = k\}) &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = k)} \int_{\Omega} Z \mathbb{I}_{\{Y=k\}} d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(Y = k)} \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\{E \leq Y\} \cap \{Y=k\}} d\mathbb{P} = \frac{\mathbb{P}(\{E \leq k\} \cap \{Y = k\})}{\mathbb{P}(Y = k)}. \end{aligned}$$

L'indépendance des variables aléatoire E et Y conduit à

$$\mathbb{E}(Z | \{Y = k\}) = \frac{\mathbb{P}(E \leq k) \mathbb{P}(Y = k)}{\mathbb{P}(Y = k)} = \mathbb{P}(E \leq k),$$

qui est le résultat annoncé.

- 2) Quelle est l'expression de la fonction mesurable $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(Z | Y) = h(Y)$?

Il suffit d'appliquer la formule du cours. On a

$$h(\cdot) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E \leq i) \mathbb{I}_{\{i\}}(\cdot).$$

Autrement dit, h est la fonction de répartition de E .

3) En déduire l'expression de la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour laquelle

$$\mathbb{P}(E \leq Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k.$$

On commence par remarquer que $\mathbb{P}(E \leq Y) = \mathbb{E}(Z)$. De plus, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z | Y))$. De plus, d'après la question précédente, on sait que $\mathbb{E}(Z | Y)$ prend les valeurs $h(k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec les probabilités associées $\mathbb{P}(Y = k)$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E \leq Y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h(k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E \leq k)\mathbb{P}(Y = k).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc montré que $a_k = \mathbb{P}(E \leq k)\mathbb{P}(Y = k)$.

Dans toute la suite, on suppose que la fonction de répartition de E est

$$F(x) = \mathbb{P}(E \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - 2^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

La variable aléatoire Y suit quant à elle une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

4) En utilisant les questions précédentes, donner l'expression de la fonction mesurable $g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{P}(E \leq Y) = g(\lambda)$.

D'après la réponse à la question 3),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E \leq Y) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(E \leq k)\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - 2^{-k})e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \right) = 1 - e^{-\lambda/2}. \end{aligned}$$

On a donc $g(\cdot) = 1 - e^{-\cdot/2}$.

Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune la loi de E . Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune une loi de Poisson de paramètre 2. Les suites $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes.

On note S_n le nombre d'indices i dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ pour lesquels l'événement $\{E_i \leq Y_i\}$ est réalisé.

5) Etudier la convergence presque-sûre de S_n/n .

Il fallait remarquer que

$$S_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{E_i \leq Y_i\}}.$$

Les variables aléatoires $Z_i := \mathbb{I}_{\{E_i \leq Y_i\}}$ étant indépendantes, de même loi d'espérance finie, la loi des grands nombres nous assure que

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{E \leq Y\}}) = \mathbb{P}(E \leq Y) = g(2) = 1 - e^{-1}.$$

Exercice 3 – Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c \frac{\exp(-y^2/2)}{y} \exp\left(-\frac{x}{y}\right) \mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

où $c > 0$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y\}$. On note f_Y la densité de Y .

- 1) Donner l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de c .

D'après le cours, on a

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y) dx = c \frac{\exp(-y^2/2)}{y} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(y) \int_0^y \exp\left(-\frac{x}{y}\right) dx$$

Puisque

$$\int_0^y \exp\left(-\frac{x}{y}\right) dx = y(1 - e^{-1}),$$

on trouve finalement

$$f_Y(y) = c(1 - e^{-1}) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(y).$$

- 2) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité ? On rappelle que pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}.$$

Il faut que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) dy = c(1 - e^{-1}) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = 1.$$

En utilisant le rappel il faut donc que $c = \{\sqrt{\pi}(1 - e^{-1})/\sqrt{2}\}^{-1}$.

- 3) Donner la fonction $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = h(Y)$.

Pour tout $y \geq 0$, la densité conditionnelle est

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= c \frac{\exp(-y^2/2)}{y} \exp\left(-\frac{x}{y}\right) \mathbb{I}_{[0,y]}(x) / \left\{ c(1 - e^{-1}) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{1 - e^{-1}} \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{x}{y}\right) \mathbb{I}_{[0,y]}(x). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h(y) = \frac{1}{1 - e^{-1}} \frac{1}{y} \int_0^y x \exp\left(-\frac{x}{y}\right) dx.$$

En posant $z = x/y$, on trouve

$$h(y) = \frac{y}{1 - e^{-1}} \int_0^1 z \exp(-z) dz = \frac{y(1 - 2e^{-1})}{1 - e^{-1}}.$$