Contrôle continu #3 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2021 - 2022

Durée : 3h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Soit E un ensemble quelconque. Donner les propriétés vérifiées par une tribu $\mathcal{E}$ de parties de E.

2) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Quelles propriétés doit vérifier l'application $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ pour être une mesure ?

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable. Donner la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{A}$.

Exercice 1 – Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x),$$

avec $\lambda > 0$. Soit N une variable aléatoire, indépendante des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$, de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in]0, 1[$. Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1) Donner l'expression, en fonction de n, p et λ, de l'espérance de la variable aléatoire NX_1.

2) Donner l'expression, en fonction de n, p et λ, de l'espérance de la variable aléatoire $(NX_1)^2$. Vous pourrez utiliser l'égalité $\mathrm{Var}(N) = \mathbb{E}(N^2) - [\mathbb{E}(N)]^2 = np(1-p)$.

3) En déduire l'expression de la variance de NX_1.

Dans la suite, on introduit la variable aléatoire

$$Y = \sum_{i=1}^{N+1} X_i.$$

4) Montrer que

$$\mathbb{E}(|Y|) \leq \frac{n+1}{\lambda} < \infty,$$

et ainsi que Y est intégrable.

5) Rappeler la définition de la tribu $\sigma(N)$ et montrer que l'on a $\sigma(N) = \sigma(\{A_i,\ i = 0, \dots, n\})$ où les ensembles $(A_i,\ i = 0, \dots, n)$ forment une partition de Ω.

6) Pour tout $i = 0, \dots, n$, donner l'expression de

$$\int_{N^{-1}(\{i\})} Y d\mathbb{P}.$$

On rappelle que

$$\mathbb{E}(Y \mid N) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} Y d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}_{A_i}.$$

7) En utilisant le rappel ci-dessus et la réponse à la question 6), déterminer la fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}(Y \mid N) = h(Y)$.

8) Donner l'expression de l'espérance de Y.

Exercice 2 – Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c \exp(-x) \mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } -x \leq y \leq x\}$.

1) Représenter sur un graphique l'ensemble Δ.

2) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit une densité ?

Dans toute la suite, on prendra pour c la valeur trouvée à la question 2). Vous pourrez donner vos résultats en fonction de c. On considère le vecteur aléatoire $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ à densité de densité $f_{(X,Y)}$.

3) Calculer la probabilité de l'ensemble $\{X \leq 1/2\} \cap \{Y \geq 0\}$.

4) Donner l'expression de la densité de X.

5) Montrer que $\mathbb{E}(Y \mid X)$ est une variable aléatoire presque-sûrement constante (vous préciserez la valeur de la constante).

Exercice 3 – Sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la mesure μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{21}\delta_{-1}(A) + \frac{12}{7} \int_{A \cap [0,\infty[} \exp(-2x) dx + \frac{2}{21}\delta_1(A).$$

1) Vérifier que μ est une mesure de probabilité.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$.

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

3) Ecrire la loi $\mathbb{P}_X$ sous la forme $\alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0,1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi de densité f (vous préciserez la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et l'expression de la densité f).

4) Calculer l'espérance de X.

Exercice 4 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition F. On suppose qu'il existe $-\infty < a < b < \infty$ tels que $F(x) = 0$ pour tout $x < a$, $F(x) = 1$ pour tout $x \geq b$ et $F(x) \in]0,1[$ pour tout $x \in [a, b[$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on introduit également les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ que l'on suppose indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X. Enfin, on pose $m_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$

1) Quelle est la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}$? Même question pour l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > b\}$.
2) Donner, en fonction de F, a et b, l'expression de la fonction de répartition de m_n ainsi que celle de M_n.
3) Pour tout $\varepsilon > 0$, donner les expressions des probabilités $\mathbb{P}(|m_n - a| > \varepsilon)$ et $\mathbb{P}(|M_n - b| \geq \varepsilon)$.
4) Que pouvez-vous dire sur la convergence en probabilité de la suite (m_n) ? Même question pour la suite (M_n).

Exercice 5 – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même loi $\mathbb{P}_X$ avec

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3.$$

On introduit également la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Calculer l'espérance de X_1.

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X_1.

3) Donner l'expression, en fonction de n, de la fonction de répartition de M_n. Cette fonction sera notée F_n.

4) En utilisant la relation

$$\mathbb{E}(M_n) = \int_0^\infty (1 - F_n(t))dt,$$

donner, en fonction de n, l'espérance de M_n.

5) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que M_n converge en probabilité vers 3.

6) Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(|M_n - 3| > \varepsilon)$. Même question lorsque $\varepsilon \in [1,2[$ puis lorsque $\varepsilon \geq 2$.

7) Montrer que M_n converge presque-sûrement vers 3.