Contrôle continu #3 de Probabilités

Correction

Questions de cours –

1) Soit E un ensemble quelconque. Donner les propriétés vérifiées par une tribu $\mathcal{E}$ de parties de E.

2) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Quelles propriétés doit vérifier l'application $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ pour être une mesure ?

3) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable. Donner la définition de l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{A}$.

Exercice 1 – Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x),$$

avec $\lambda > 0$. Soit N une variable aléatoire, indépendante des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$, de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in]0, 1[$. Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1) Donner l'expression, en fonction de n, p et λ, de l'espérance de la variable aléatoire NX_1.

Correction : Les variables aléatoires N et X_1 étant indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(NX_1) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

Il reste à calculer

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} k C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} k C_{n-1}^{k} p^{k-1} (1-p)^{n-1-k} = np. \end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^\infty \lambda x \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(NX_1) = \frac{np}{\lambda}.$$

2) Donner l'expression, en fonction de n, p et λ, de l'espérance de la variable aléatoire $(NX_1)^2$. Vous pourrez utiliser l'égalité $\mathrm{Var}(N) = \mathbb{E}(N^2) - [\mathbb{E}(N)]^2 = np(1-p)$.
Correction : Par indépendance, on a

$$\mathbb{E}[(NX_1)^2] = \mathbb{E}(N^2)\mathbb{E}(X_1^2).$$

Or,

$$\mathbb{E}(N^2) = np(1-p) + n^2p^2$$

et

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_0^\infty \lambda x^2 \exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty x^2 \exp(-x)dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

En conclusion,

$$\mathbb{E}[(NX_1)^2] = \frac{2np(1-p) + 2n^2p^2}{\lambda^2}$$

3) En déduire l'expression de la variance de NX_1.
Correction : En utilisant la formule $\mathrm{Var}(NX_1) = \mathbb{E}[(NX_1)^2] - [\mathbb{E}(NX_1)]^2$ *on trouve*

$$\mathrm{Var}(NX_1) = \frac{2np(1-p) + n^2p^2}{\lambda^2}.$$

Dans la suite, on introduit la variable aléatoire

$$Y = \sum_{i=1}^{N+1} X_i.$$

4) Montrer que

$$\mathbb{E}(|Y|) \leq \frac{n+1}{\lambda} < \infty,$$

et ainsi que Y est intégrable.
Correction : Tout d'abord, Y *est une variable aléatoire positive donc* $\mathbb{E}(|Y|) = \mathbb{E}(Y)$. *Ensuite, il est clair que presque-sûrement,* $N \leq n$ *donc*

$$Y \leq \sum_{i=1}^{n+1} X_i.$$

On obtient le résultat en utilisant la croissance de l'espérance.

5) Rappeler la définition de la tribu $\sigma(N)$ et montrer que l'on a $\sigma(N) = \sigma(\{A_i,\ i = 0,\ldots,n\})$ où les ensembles $(A_i,\ i = 0,\ldots,n)$ forment une partition de Ω.
Correction : La tribu $\sigma(N)$ *est la plus petite tribu rendant* N *mesurable. C'est donc la tribu engendrée par* $\{N^{-1}(\{i\}),\ i = 0,\ldots,n\}$. *Il est clair que les* $A_i = N^{-1}(\{i\})$ *forment une partition de* Ω.

6) Pour tout $i = 0, \dots, n$, donner l'expression de

$$\int_{N^{-1}(\{i\})} Y d\mathbb{P}.$$

Correction : On a

$$\int_{N^{-1}(\{i\})} Y d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\{N=i\}} Y d\mathbb{P} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{i+1} X_j \mathbb{I}_{\{N=i\}} d\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{i+1} \int_{\Omega} X_j \mathbb{I}_{\{N=i\}} d\mathbb{P}$$

De part l'indépendance entre N et X_j,

$$\int_{\Omega} X_j \mathbb{I}_{\{N=i\}} d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left(X_j \mathbb{I}_{\{N=i\}}\right) = \mathbb{E}(X_j)\mathbb{P}(N = i) = \frac{C_n^i p^i (1-p)^{n-i}}{\lambda}.$$

En conclusion,

$$\int_{N^{-1}(\{i\})} Y d\mathbb{P} = (1+i) \frac{C_n^i p^i (1-p)^{n-i}}{\lambda}.$$

On rappelle que

$$\mathbb{E}(Y \mid N) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} Y d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}_{A_i}.$$

7) En utilisant le rappel ci-dessus et la réponse à la question 6), déterminer la fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}(Y \mid N) = h(Y)$.
Correction : On a

$$\mathbb{E}(Y \mid N) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1+i}{\lambda} \mathbb{I}_{\{N=i\}} = \frac{1+N}{\lambda}.$$

8) Donner l'expression de l'espérance de Y.
Correction : On a

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y \mid N)] = \frac{1 + \mathbb{E}(N)}{\lambda} = \frac{1+np}{\lambda}$$

Exercice 2 – Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = c \exp(-x) \mathbb{I}_{\Delta}(x, y),$$

où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ et } -x \leq y \leq x\}$.

1) Représenter sur un graphique l'ensemble Δ.

2) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit une densité ?
Correction : Pour que la fonction soit positive, il faut que $c > 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\Delta} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy &= c\int_0^1 \int_{-x}^{x} f_{(X,Y)}(x,y)dydx = c\int_0^1 2x\exp(-x)dx \\ &= 2c[1-2\exp(-1)],\end{aligned}$$

le calcul de l'intégrale étant fait à l'aide d'une intégration par parties. Il faut donc prendre $c = 1/2[1-2\exp(-1)]^{-1}$ pour la fonction soit d'intégrale 1.

Dans toute la suite, on prendra pour c la valeur trouvée à la question 2). Vous pourrez donner vos résultats en fonction de c. On considère le vecteur aléatoire $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ à densité de densité $f_{(X,Y)}$.

3) Calculer la probabilité de l'ensemble $\{X \leq 1/2\} \cap \{Y \geq 0\}$.
Correction : On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X \leq 1/2\} \cap \{Y \geq 0\}) &= \mathbb{P}_{(X,Y)}(]-\infty, 1/2] \times [0, \infty[) \\ &= c\int_0^{1/2} \int_0^{x} \exp(-x)dydx = c\int_0^{1/2} x\exp(-x)dx.\end{aligned}$$

A l'aide d'une intégration par parties, on trouve

$$\mathbb{P}(\{X \leq 1/2\} \cap \{Y \geq 0\}) = c\left[1 - \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right)\right].$$

4) Donner l'expression de la densité de X.
Correction : Il suffit d'intégrer la densité du couple par rapport à la seconde composante.

$$\begin{aligned}f_X(x) &= c\int f_{(X,Y)}(x,y)dy = c\mathbb{I}_{[0,1]}(x)\int_{-x}^{x} \exp(-x)dy \\ &= 2cx\exp(-x)\mathbb{I}_{[0,1]}(x).\end{aligned}$$

5) Montrer que $\mathbb{E}(Y \mid X)$ est une variable aléatoire presque-sûrement constante (vous préciserez la valeur de la constante).
Correction : Commençons par trouver l'expression de la densité conditionnelle. On a pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2x}\ \mathbb{I}_{[-x,x]}(y)$$

On en déduit que $\mathbb{E}(Y \mid X) = h(X)$ avec

$$h(x) = \int y f_{Y|X=x}(y)dy = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} ydy = 0.$$

Ainsi $\mathbb{E}(Y \mid X) = 0$ presque-sûrement.

Exercice 3 – Sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la mesure μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{21}\delta_{-1}(A) + \frac{12}{7}\int_{A\cap[0,\infty[} \exp(-2x)dx + \frac{2}{21}\delta_1(A).$$

1) Vérifier que μ est une mesure de probabilité.
Correction : Il suffit de vérifier que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. On a

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}) &= \frac{1}{21}\delta_{-1}(\mathbb{R}) + \frac{12}{7}\int_0^\infty \exp(-2x)dx + \frac{2}{21}\delta_1(\mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{12}{7}\Big[-\frac{1}{2}\exp(-2x)\Big]_0^\infty = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1.\end{aligned}$$

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$.

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
Correction : La fonction de répartition de X est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $F(t) = \mu(]-\infty, t])$. On a $F(t) = 0$ si $t < -1$. Si $t \in [-1, 0[$, $F(t) = 1/21$. Si $t \in [0, 1[$,

$$F(t) = \frac{1}{21} + \frac{12}{7}\int_0^t \exp(-2x)dx = \frac{1}{21} + \frac{6}{7}[1 - \exp(-2t)].$$

Enfin, si $t \geq 1$,

$$F(t) = \frac{1}{7} + \frac{12}{7}\int_0^t \exp(-2x)dx = \frac{1}{7} + \frac{6}{7}[1 - \exp(-2t)].$$

En conclusion,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \textit{si } t < -1, \\ 1/21 & \textit{si } t \in [-1, 0[, \\ 1/21 + 6[1 - \exp(-2t)]/7 & \textit{si } t \in [0, 1[, \\ 1/7 + 6[1 - \exp(-2t)]/7 & \textit{si } t \geq 1. \end{cases}$$

3) Ecrire la loi $\mathbb{P}_X$ sous la forme $\alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi de densité f (vous préciserez la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et l'expression de la densité f).
Correction : Il y a deux sauts en -1 et 1 de hauteur $1/21$ et $2/21$ respectivement. Donc

$$\alpha = \frac{1}{7},$$

et

$$\mathbb{P}_X^{(1)} = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{2}{3}\delta_1.$$

Enfin, la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ *est*

$$f(t) = \frac{1}{1-\alpha} F'(t) = \frac{7}{6} \times \frac{12}{7} \exp(-2t) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(t) = 2 \exp(-2t) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(t).$$

4) Calculer l'espérance de X.
Correction : L'espérance de X *est égale à* $\alpha \mathbb{E}(X_1) + (1-\alpha)\mathbb{E}(X_2)$ *où* X_1 *suit la loi* $\mathbb{P}_X^{(1)}$ *et* X_2 *la loi* $\mathbb{P}_X^{(1)}$. *On a*

$$\mathbb{E}(X_1) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

et

$$\mathbb{E}(X_2) = 2 \int_0^\infty x \exp(-2x) dx = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{21} + \frac{3}{7} = \frac{10}{21}.$$

Exercice 4 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition F. On suppose qu'il existe $-\infty < a < b < \infty$ tels que $F(x) = 0$ pour tout $x < a$, $F(x) = 1$ pour tout $x \geq b$ et $F(x) \in]0, 1[$ pour tout $x \in [a, b[$. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on introduit également les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ que l'on suppose indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X. Enfin, on pose $m_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$

1) Quelle est la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}$? Même question pour l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > b\}$.
Correction : On a

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}) = \mathbb{P}(X < a) = \lim_{x \uparrow a} F(x).$$

Or, $F(x) = 0$ *pour tout* $x < a$ *donc* $\mathbb{P}(X < a) = 0$. *De même*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > b\}) = \mathbb{P}(X > b) = 1 - \mathbb{P}(X \leq b) = 0.$$

2) Donner, en fonction de F, a et b, l'expression de la fonction de répartition de m_n ainsi que celle de M_n.
Correction : Pour la fonction de répartition de m_n, *que l'on notera* F_m, *on a* $F_m(t) = 0$ *pour tout* $t < a$ *et* $F_m(t) = 1$ *pour tout* $t \geq b$. *Pour* $t \in [a, b[$,

$$\begin{aligned} F_m(t) &= \mathbb{P}(m_n \leq t) = 1 - \mathbb{P}(m_n > t) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > t) \\ &= 1 - [\mathbb{P}(X > t)]^n = 1 - [1 - F(t)]^n. \end{aligned}$$

Pour la fonction de répartition de M_n, que l'on notera F_M, on a $F_M(t) = 0$ pour tout $t < a$ et $F_M(t) = 1$ pour tout $t \geq b$. Pour $t \in [a, b[$,

$$F_M(t) = \mathbb{P}(M_n \leq t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) = [F(t)]^n.$$

3) Pour tout $\varepsilon > 0$, donner les expressions des probabilités $\mathbb{P}(|m_n - a| > \varepsilon)$ et $\mathbb{P}(|M_n - b| \geq \varepsilon)$.
Correction : Tout d'abord, il faut remarquer que $m_n \geq a$ presque-sûrement donc,

$$\mathbb{P}(|m_n - a| > \varepsilon) = \mathbb{P}(m_n > a + \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(m_n \leq a + \varepsilon).$$

Si $a + \varepsilon \geq b$, i.e., si $\varepsilon \geq b - a$,

$$\mathbb{P}(|m_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

Si $\varepsilon < b - a$,

$$\mathbb{P}(|m_n - a| > \varepsilon) = [1 - F(a + \varepsilon)]^n.$$

De la même façon,

$$\mathbb{P}(|M_n - b| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq b - \varepsilon).$$

Si $b - \varepsilon < a$ i.e., si $\varepsilon > b - a$, $\mathbb{P}(|M_n - b| \geq \varepsilon) = 0$. Si $\varepsilon \leq b - a$,

$$\mathbb{P}(|M_n - b| \geq \varepsilon) = [F(b - \varepsilon)]^n.$$

4) Que pouvez-vous dire sur la convergence en probabilité de la suite (m_n) ? Même question pour la suite (M_n).
Correction : D'après la question précédente, comme $F(t) \in]0, 1[$ pour tout $t \in [a, b[$, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|m_n - a| > \varepsilon) = 0$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|M_n - b| \geq \varepsilon) = 0$$

Ainsi, m_n converge en probabilité vers a et M_n converge en probabilité vers b.

Exercice 5 – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même loi $\mathbb{P}_X$ avec

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2 + \frac{1}{4}\delta_3.$$

On introduit également la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Calculer l'espérance de X_1.
Correction : L'espérance de X_1 est

$$\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}.$$

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X_1.
Correction : Si $t < 1$, $F(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) = 0$. Si $t \in [1, 2[$, $F(t) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$. Si $t \in [2, 3[$, $F(t) = \mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_1 = 2\}) = 1/2 + 1/4 = 3/4$. Enfin, si $t \geq 3$, $F(t) = 1$.

3) Donner l'expression, en fonction de n, de la fonction de répartition de M_n. Cette fonction sera notée F_n.
Correction : On a

$$F_n(t) = \mathbb{P}(M_n \leq t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t) = [F(t)]^n = \begin{cases} 0 & si\ t < 1, \\ 2^{-n} & si\ t \in [1, 2[, \\ (3/4)^n & si\ t \in [2, 3[, \\ 1 & si\ t \geq 3. \end{cases}$$

4) En utilisant la relation

$$\mathbb{E}(M_n) = \int_0^\infty (1 - F_n(t))dt,$$

donner, en fonction de n, l'espérance de M_n.
Correction :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n) &= \int_0^1 dt + \int_1^2 (1 - 2^{-n})dt + \int_2^3 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) dt \\ &= 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

5) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que M_n converge en probabilité vers 3.
Correction : Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n - 3| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|M_n - 3|)}{\varepsilon} = \frac{\mathbb{E}(3 - M_n)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \to 0.$$

Ainsi, M_n converge en probabilité vers 3

6) Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(|M_n - 3| > \varepsilon)$. Même question lorsque $\varepsilon \in [1, 2[$ puis lorsque $\varepsilon \geq 2$.
Correction : On a

$$\mathbb{P}(|M_n - 3| > \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n < 3 - \varepsilon).$$

Ainsi, si $\varepsilon \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}(|M_n - 3| > \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n < 3 - \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq 2) = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Si $\varepsilon \in [1,2[$,

$$\mathbb{P}(|M_n - 3| > \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n < 3 - \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Enfin, si $\varepsilon \geq 2$,

$$\mathbb{P}(|M_n - 3| > \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n < 3 - \varepsilon) = 0.$$

7) Montrer que M_n converge presque-sûrement vers 3.
Correction : Les suites $(3/4)^n$ *ou* $(1/2)^n$ *étant les termes d'une série convergente (séries arithmétiques de raisons* $3/4$ *et* $1/2$*), on a*

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|M_n - 3| > \varepsilon) < \infty.$$

Ainsi, d'après le corollaire du Lemme de Borel-Cantelli, M_n *converge presque-sûrement vers 3.*