Contrôle continu #3 de “Intégration et Probabilités”

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2022 - 2023

Durée : 3h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice préliminaire – Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\int_0^\infty x^i \exp(-x)dx = i \int_0^\infty x^{i-1} \exp(-x)dx.$$

En déduire (par récurrence) que

$$\int_0^\infty x^i \exp(-x)dx = i!$$

Exercice 1 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ définie pour $\lambda > 0$ par

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1) Sous quel nom est connue cette loi ?

2) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ donner, en fonction de λ, l'expression de $\mathbb{E}(X^i)$.

On considère à présent une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ indépendante de X et de loi $\mathbb{P}_Y$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}.$$

3) Calculer l'espérance de Y. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x^i}{i!}.$$

4) On pose $Z = \min(2, Y)$. Donner la loi de Z et calculer son espérance.

5) On note $\sigma(Y)$ la plus petite tribu rendant Y mesurable. Montrer qu'il existe des événements $\{A_i \in \mathcal{F};\ i \in \mathbb{N}\}$ (que vous préciserez) de probabilité non nulle, qui forment une partition de Ω et tels que

$$\sigma(Y) = \sigma(\{A_i \in \mathcal{F};\ i \in \mathbb{N}\}).$$

Soit $V : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable. On rappelle que si $\mathcal{A} = \sigma(\{A_i \in \mathcal{F};\ i \in \mathbb{N}\})$ où les événements A_i sont de probabilité non nulle et forment une partition de Ω alors

$$\mathbb{E}(V \mid \mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} V d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}_{A_i}.$$

6) Donner l'expression de la fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}(X^Z \mid Y) = h(Y)$.

7) En utilisant la question précédente, calculer $\mathbb{E}(X^Z)$.

8) Montrer que $X^Z = \mathbb{I}_{\{0\}}(Y) + X\mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + X^2\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(Y)$. Utiliser cette égalité pour calculer $\mathbb{E}(X^Z)$.

Exercice 2 – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times B) = \int_A \int_B \frac{2}{y} x^{-1/y-1} \mathbb{I}_\Delta(x,y) dy dx,$$

avec $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1 \text{ et } 0 < y < 1/2\}$.

1) Donner l'expression de la densité de Y. Quelle loi reconnaissez-vous ?

2) Calculer l'espérance et la variance de Y.

On introduit la fonction $L :]0,\infty[\to]0,\infty[$ définie pour tout $t > 0$ par

$$L(t) = \int_2^\infty \frac{1}{z} \exp(-tz) dz.$$

La fonction L est la transformée de Laplace de la fonction $z \mapsto z^{-1}\mathbb{I}_{]2,\infty[}(z)$.

3) Donner l'expression, en fonction de la transformée de Laplace L, de la densité de X. (Aide : poser $z = 1/y$.)

4) Déterminez la fonction mesurable $h :]0,1/2[\to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y)$.

5) Calculer l'espérance de X.

6) En déduire la valeur de

$$\int_1^\infty L(\ln(x)) dx.$$

Exercice 3 – Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E_1, \mathcal{P}(E_1))$ et $(E_2, \mathcal{P}(E_2))$ respectivement. On suppose que la loi de X_1 est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour $\lambda > 0$ par

$$\mu_1(\{k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La loi de X_2 quant à elle est donnée pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p \in]0,1[$ et $k \in \{0, \cdots, n\}$ par

$$\mu_2(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, on considère une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ de loi $\mathbb{P}_Y = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

1) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par la variable aléatoire Y ?

2) Pour tout $k \in E$, donner, en fonction de α, λ, n et p, l'expression de $\mathbb{P}_Y(\{k\})$.

3) Donner les expressions de $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0[)$, $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0])$ et $\mathbb{P}_Y(]1/2, \infty[)$.

4) Donner l'expression de $\mathbb{E}(Y)$.

5) Donner l'expression de $\mathrm{Var}(Y)$.

6) Montrer que

$$\mathrm{Var}(Y) - [\alpha \mathrm{Var}(X_1) + (1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)] = \alpha[\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(Y)]^2 + (1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(Y)]^2.$$

7) En déduire que $\mathrm{Var}(Y) \geq \alpha \mathrm{Var}(X_1) + (1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)$. Donner l'expression de λ (en fonction de n et p) pour que l'on ait l'égalité pour tout $\alpha \in (0,1)$.

On considère à présent la mesure ν_1 définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour $\theta > 0$ par

$$\nu_1(]-\infty, t]) = \frac{1}{\theta}(1 - \exp(-\theta t))\, \mathbb{I}_{]0,\infty[}(t).$$

8) Vérifier que

$$\nu_1(]-\infty, t]) = \int_{]-\infty,t]} \exp(-\theta x) \mathbb{I}_{]0,\infty[}(x) dx.$$

9) Donner, en fonction de θ, l'expression de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_1(t).$$

10) Montrer que pour tout $c > 0$, la fonction $\nu_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ donnée par $\nu_2 = \alpha^2\mu_1 + \alpha(1-\alpha)\mu_2 + c(1-\alpha)\nu_1$ est une mesure.

11) Donner l'expression de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_2(t).$$

12) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que ν_2 soit une mesure de probabilité ?

Exercice 4 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la variable aléatoire $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_{X_n} = \alpha_n \delta_1 + (1-\alpha_n)\mu_n$ où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1[$, δ_1 est la mesure de Dirac au point 1 et μ_n est la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour toute suite positive (θ_n) par

$$\mu_n(A) = \int_A \frac{1}{\theta_n} \exp\left(-\frac{x}{\theta_n}\right) \mathbb{I}_{]0,\infty[}(x) dx.$$

1) Donner l'expression de la fonction de répartition F_n de X_n.

2) Trouver, de deux façons différentes, l'expression de l'espérance de X_n.

3) Donner l'expression de la variance de X_n.

4) A l'aide des questions 2) et 3), étudier la convergence en probabilité de X_n dans les cas suivants :

   i) $\alpha_n \to 1$ et $\theta_n \to \theta \geq 0$,

   ii) $\alpha_n \to 0$ et $\theta_n \to 0$.

5) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1-\alpha_n}{\varepsilon^2}\left[\, 1 - 2\theta_n(1-\theta_n)\right].$$

6) On suppose pour cette question que (θ_n) est la suite constante égale à 1. Proposer une suite (α_n) pour laquelle X_n converge presque-sûrement vers 1 (justifier correctement votre choix).