Intégration et probabilité : Contrôle continu #3

Correction

Exercice préliminaire – Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\int_0^\infty x^i \exp(-x)dx = i \int_0^\infty x^{i-1} \exp(-x)dx.$$

En déduire (par récurrence) que

$$\int_0^\infty x^i \exp(-x)dx = i!$$

Réponse – En prenant $u(x) = x^i$ et $v'(x) = \exp(-x)$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^i \exp(-x)dx &= \left[-x^i \exp(-x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty i x^{i-1} \exp(-x)dx \\ &= i \int_0^\infty x^{i-1} \exp(-x)dx.\end{aligned}$$

Si on pose

$$g(i) := \int_0^\infty x^i \exp(-x)dx,$$

on a $g(1) = 1 = 1!$. Supposons que $g(i) = i!$. On a $g(i+1) = (i+1)g(i) = (i+1)!$.

Exercice 1 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ définie pour $\lambda > 0$ par

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1) Sous quel nom est connue cette loi ?
   Réponse – C'est une loi exponentielle de paramètre λ.
2) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ donner, en fonction de λ, l'expression de $\mathbb{E}(X^i)$.
   Réponse – On a

$$\mathbb{E}(X^i) = \lambda \int_0^\infty x^i \exp(-\lambda x)dx.$$

En posant $y = \lambda x$ il vient

$$\mathbb{E}(X^i) = \frac{1}{\lambda^i} \int_0^\infty y^i \exp(-y)dy = \frac{i!}{\lambda^i}$$

On considère à présent une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ indépendante de X et de loi $\mathbb{P}_Y$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}.$$

3) Calculer l'espérance de Y. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{x^i}{i!}.$$

Réponse – On obtient facilement que $\mathbb{E}(Y) = 1$.

4) On pose $Z = \min(2, Y)$. Donner la loi de Z et calculer son espérance.
Réponse – La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Il suffit de calculer les probabilités $\mathbb{P}(Z = 0)$, $\mathbb{P}(Z = 1)$ et $\mathbb{P}(Z = 2)$. Or, $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-1}$. De plus, $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathrm{e}^{-1}$. Enfin, $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \times \mathrm{e}^{-1} + 1 \times \mathrm{e}^{-1} + 2 \times (1 - 2\mathrm{e}^{-1}) = 2 - 3\mathrm{e}^{-1}.$$

5) On note $\sigma(Y)$ la plus petite tribu rendant Y mesurable. Montrer qu'il existe des événements $\{A_i \in \mathcal{F};\ i \in \mathbb{N}\}$ (que vous préciserez) de probabilité non nulle, qui forment une partition de Ω et tels que

$$\sigma(Y) = \sigma(\{A_i \in \mathcal{F};\ i \in \mathbb{N}\}).$$

Réponse – Il suffit de prendre $A_i = Y^{-1}(\{i\}) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) = i\}$.

Soit $V : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire intégrable. On rappelle que si $\mathcal{A} = \sigma(\{A_i \in \mathcal{F};\ i \in \mathbb{N}\})$ où les événements A_i sont de probabilité non nulle et forment une partition de Ω alors

$$\mathbb{E}(V \mid \mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} V d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}_{A_i}.$$

6) Donner l'expression de la fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}(X^Z \mid Y) = h(Y)$.
Réponse – D'après le rappel,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^Z \mid Y) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(Y = i)} \int_{\{Y=i\}} X^Z d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}_{\{Y=i\}} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\mathbb{P}(Y = i)} \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\{i\}}(Y) X^{\min(2,i)} d\mathbb{P} \right) \mathbb{I}_{\{i\}}(Y). \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'indépendance entre X et Y,

$$\int_{\Omega} \mathbb{I}_{\{i\}}(Y) X^i d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\{i\}}(Y) X^{\min(2,i)} \right) = \mathbb{P}(Y = i) \mathbb{E}(X^{\min(2,i)}).$$

Ainsi
$$\mathbb{E}(X^Z \mid Y) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X^{\min(2,i)})\mathbb{I}_{\{i\}}(Y) = h(Y),$$
avec pour tout $y \in \mathbb{N}$, $h(y) = \mathbb{E}[X^{\min(2,y)}] = \min(2, y!)/\lambda^{\min(2,y)}$.

7) En utilisant la question précédente, calculer $\mathbb{E}(X^Z)$.
Réponse – On sait que $\mathbb{E}(X^Z) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X^Z \mid Y)]$. *Ainsi,*
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^Z) &= \mathrm{e}^{-1}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\min(2,k!)}{k!\lambda^{\min(2,k)}} = \mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k!}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}(\mathrm{e}^1-2)\right).\end{aligned}$$

8) Montrer que $X^Z = \mathbb{I}_{\{0\}}(Y) + X\mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + X^2\mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(Y)$. Utiliser cette égalité pour calculer $\mathbb{E}(X^Z)$.
Réponse – Il suffit de remarquer que
$$X^Z = X^Z\left(\mathbb{I}_{\{0\}}(Y) + \mathbb{I}_{\{1\}}(Y) + \mathbb{I}_{\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}(Y)\right),$$
et que $X^Z = 1$ *lorsque* $Y = 0$, $X^Z = X$ *lorsque* $Y = 1$ *et enfin* $X^Z = X^2$ *lorsque* $Y \geq 2$. *On calcule ensuite facilement l'espérance en utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que* X *et* Y *sont indépendantes.*

Exercice 2 – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par
$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A\times B) = \int_A\int_B \frac{2}{y}x^{-1/y-1}\mathbb{I}_\Delta(x,y)dydx,$$
avec $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1 \text{ et } 0 < y < 1/2\}$.

1) Donner l'expression de la densité de Y. Quelle loi reconnaissez-vous ?
Réponse – Le vecteur aléatoire (X,Y) *admet pour densité la fonction*
$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{y}x^{-1/y-1}\mathbb{I}_\Delta(x,y) = \frac{2}{y}x^{-1/y-1}\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)\mathbb{I}_{]0,1/2[}(y).$$
On a pour tout $y \in \mathbb{R}$
$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx = \frac{2}{y}\mathbb{I}_{]0,1/2[}(y)\int_1^\infty x^{-1/y-1}dx = 2\mathbb{I}_{]0,1/2[}(y).$$
On reconnait la densité d'une loi uniforme sur $]0,1/2[$.

2) Calculer l'espérance et la variance de Y.
Réponse – On montre facilement que $\mathbb{E}(Y) = 1/4$ *et* $\mathbb{E}(Y^2) = 1/12$. *Ainsi,* $\mathrm{Var}(Y) = 1/12 - 1/16 = 1/48$.

On introduit la fonction $L :]0,\infty[\to]0,\infty[$ définie pour tout $t > 0$ par

$$L(t) = \int_2^\infty \frac{1}{z}\exp(-tz)dz.$$

La fonction L est la transformée de Laplace de la fonction $z \mapsto 1/z\mathbb{I}_{]2,\infty[}(z)$.

3) Donner l'expression, en fonction de la transformée de Laplace L, de la densité de X. (Aide : poser $z = 1/y$.)
Réponse − On a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)\int_0^{1/2} \frac{2}{y}x^{-1/y-1}dy \\ &= \frac{2}{x}\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)\int_0^{1/2}\frac{1}{y}x^{-1/y}dy. \end{aligned}$$

En posant $z = 1/y$, il vient

$$f_X(x) = \frac{2}{x}\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)\int_2^\infty \frac{1}{z}\exp(-z\ln(x))dz = \frac{2}{x}\mathbb{I}_{]1,\infty[}(x)L(\ln(x)).$$

4) Déterminez la fonction mesurable $h :]0,1/2[\to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y)$.
Réponse − D'après le cours, pour tout $y \in]0,1/2[$,

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} x\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}dx = \int_1^\infty \frac{1}{y}x^{-1/y}dx = \frac{1}{1-y}.$$

5) Calculer l'espérance de X.
Réponse − Comme $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid Y)]$ on a

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} h(y)f_Y(y)dy = 2\int_0^{1/2}\frac{1}{1-y}dy = 2\int_{1/2}^1 \frac{1}{y}dy = 2\ln(2).$$

6) En déduire la valeur de

$$\int_1^\infty L(\ln(x))dx.$$

Réponse − D'après la question 3), on a

$$\mathbb{E}(X) = 2\int_1^\infty L(\ln(x))dx = 2\ln(2).$$

Ainsi,

$$\int_1^\infty L(\ln(x))dx = \ln(2).$$

Exercice 3 – Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E_1, \mathcal{P}(E_1))$ et $(E_2, \mathcal{P}(E_2))$ respectivement. On suppose que la loi de X_1 est définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour $\lambda > 0$ par

$$\mu_1(\{k\}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

La loi de X_2 quant à elle est donnée pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p \in]0, 1[$ et $k \in \{0, \cdots, n\}$ par

$$\mu_2(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Pour $\alpha \in]0, 1[$, on considère une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ de loi $\mathbb{P}_Y = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

1) Quel est l'ensemble E des valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
   Réponse – On a évidemment $E = \mathbb{N}$.

2) Pour tout $k \in E$, donner, en fonction de α, λ, n et p, l'expression de $\mathbb{P}_Y(\{k\})$.
   Réponse – Si $k \in \{0, \cdots, n\}$ on a

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \alpha\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + (1-\alpha)\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k}.$$

   Si $k \in \{n+1, \cdots\}$ on a

$$\mathbb{P}_Y(\{k\}) = \alpha\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

3) Donner les expressions de $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0[)$, $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0])$ et $\mathbb{P}_Y(]1/2, \infty[)$.
   Réponse – On a $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0[) = 0$. De plus $\mathbb{P}_Y(]-\infty, 0]) = \mathbb{P}_Y(\{0\}) = \alpha\mathrm{e}^{-\lambda} + (1-\alpha)(1-p)^n$. Enfin, $\mathbb{P}_Y(]1/2, \infty[) = 1 - \mathbb{P}_Y(]-\infty, 1/2]) = 1 - \mathbb{P}_Y(]-\infty, 0])$.

4) Donner l'expression de $\mathbb{E}(Y)$.
   Réponse – Le plus simple est d'utiliser le fait que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_\Omega Y d\mathbb{P} = \int_E y d\mathbb{P}_Y(y) = \alpha\int_E y d\mu_1(y) + (1-\alpha)\int_E y d\mu_2(y) \\ &= \alpha\mathbb{E}(X_1) + (1-\alpha)\mathbb{E}(X_2). \end{aligned}$$

   Il reste à montrer que $\mathbb{E}(X_1) = \lambda$ et $\mathbb{E}(X_2) = np$.

5) Donner l'expression de $\mathrm{Var}(Y)$.
   Réponse – Comme précédemment, on a $\mathbb{E}(Y^2) = \alpha\mathbb{E}(X_1^2) + (1-\alpha)\mathbb{E}(X_2^2)$. Or, $\mathbb{E}(X_1^2) = \lambda(1+\lambda)$ et $\mathbb{E}(X_2^2) = np(1+(n-1)p)$. Ainsi

$$\mathbb{E}(Y^2) = \alpha\lambda(1+\lambda) + (1-\alpha)np(1+(n-1)p).$$

   On en déduit que

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2 = \alpha\lambda(1+\lambda) + (1-\alpha)np(1+(n-1)p) - [\alpha\lambda - (1-\alpha)np]^2.$$

6) Montrer que

$$\mathrm{Var}(Y)-[\alpha\mathrm{Var}(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)] = \alpha[\mathbb{E}(X_1)-\mathbb{E}(Y)]^2+(1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2)-\mathbb{E}(Y)]^2.$$

Réponse – Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \alpha\lambda+(1-\alpha)np(1-p)+\alpha\lambda^2+(1-\alpha)(np)^2-[\alpha\lambda+(1-\alpha)np]^2 \\ &= \alpha\mathrm{Var}(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)+\alpha[\mathbb{E}(X_1)]^2+(1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2)]^2-[\mathbb{E}(Y)]^2 \end{aligned}$$

Il est ensuite facile de vérifier que

$$\alpha[\mathbb{E}(X_1)]^2+(1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2)]^2-[\mathbb{E}(Y)]^2 = \alpha[\mathbb{E}(X_1)-\mathbb{E}(Y)]^2+(1-\alpha)[\mathbb{E}(X_2)-\mathbb{E}(Y)]^2.$$

7) En déduire que $\mathrm{Var}(Y) \geq \alpha\mathrm{Var}(X_1)+(1-\alpha)\mathrm{Var}(X_2)$. Donner l'expression de λ (en fonction de n et p) pour que l'on ait légalité pour tout $\alpha \in (0,1)$.
Réponse – L'inégalité est une conséquence directe de la question précédente. Pour avoir l'égalité, il faut que $\alpha\mathbb{E}(X_1)+(1-\alpha)\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(Y)$. *Ceci n'est possible que si* $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$ *c'est-à-dire* $\lambda = np$.

On considère à présent la mesure ν_1 définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pour $\theta > 0$ par

$$\nu_1(]-\infty,t]) = \frac{1}{\theta}\,(1-\exp(-\theta t))\,\mathbb{I}_{]0,\infty[}(t).$$

8) Vérifier que

$$\nu_1(]-\infty,t]) = \int_{]-\infty,t]} \exp(-\theta x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)dx.$$

Réponse – C'est un simple calcul

9) Donner, en fonction de θ, l'expression de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_1(t).$$

Réponse – La mesure ν_1 *étant une mesure de densité* $\exp(-\theta x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)$ *par rapport à la mesure de Lebesgue (attention ce n'est pas une densité de probabilité), on a d'après le cours*

$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_1(t) = \int_{\mathbb{R}} t\exp(-\theta t)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(t)dt = \frac{1}{\theta^2}.$$

10) Montrer que pour tout $c > 0$, la fonction $\nu_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ donnée par $\nu_2 = \alpha^2\mu_1+\alpha(1-\alpha)\mu_2+c(1-\alpha)\nu_1$ est une mesure.
Réponse – Il faut vérifier que $\nu_2(\emptyset) = 0$ *et que* ν_2 *est* σ*-additive.*

11) En utilisant les résultats précédents, donner l'expression de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_2(t).$$

Réponse – Il faut remarquer que

$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_2(t) = \alpha^2 \mathbb{E}(X_1) + \alpha(1-\alpha)\mathbb{E}(X_2) + c(1-\alpha)\int_{\mathbb{R}} t d\nu_1(t).$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} t d\nu_2(t) = \alpha^2\lambda + \alpha(1-\alpha)np + \frac{c(1-\alpha)}{\theta^2}.$$

12) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que ν_2 soit une mesure de probabilité.
Réponse – Il faut choisir $c > 0$ pour que $\nu_2(\mathbb{R}) = 1$. Or,

$$\nu_2(\mathbb{R}) = \alpha^2\mu_1(\mathbb{R}) + \alpha(1-\alpha)\mu_2(\mathbb{R}) + c(1-\alpha)\nu_1(\mathbb{R}) = \alpha + c(1-\alpha)\nu_1(\mathbb{R}).$$

Or, $\nu_1(\mathbb{R}) = 1/\theta$. Donc en prenant $c = \theta$ on a bien $\nu_2(\mathbb{R}) = 1$.

Exercice 4 – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la variable aléatoire $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_{X_n} = \alpha_n\delta_1 + (1-\alpha_n)\mu_n$ où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1[$, δ_1 est la mesure de Dirac au point 1 et μ_n est la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et pour toute suite (θ_n) positive par

$$\mu_n(A) = \int_A \frac{1}{\theta_n} \exp\left(-\frac{x}{\theta_n}\right) \mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)dx.$$

1) Donner l'expression de la fonction de répartition F_n de X_n.
Réponse – Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$F_n(t) = \mathbb{P}_{X_n}(]-\infty,t]) = \alpha_n\delta_1(]-\infty,t]) + (1-\alpha_n)\mu_n(]-\infty,t]).$$

Or,

$$\delta_1(]-\infty,t]) = \begin{cases} 0 & si\ t < 1 \\ 1 & si\ t \geq 1. \end{cases}$$

et

$$\mu_n(]-\infty,t]) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1-\exp(-t/\theta_n) & si\ t \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ (1-\alpha_n)[1-\exp(-t/\theta_n)] & si\ t \in [0,1[, \\ \alpha_n + (1-\alpha_n)[1-\exp(-t/\theta_n)] & si\ t \geq 1. \end{cases}$$

2) Trouver, de deux façons différentes, l'expression de l'espérance de X_n.
Réponse – La première méthode est le calcul direct.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \int_\Omega X_n d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_{X_n} = \alpha_n + (1-\alpha_n)\int_0^\infty \frac{x}{\theta_n}\exp\left(-\frac{x}{\theta_n}\right) \\ &= \alpha_n + (1-\alpha_n)\theta_n. \end{aligned}$$

La deuxième méthode consiste à intégrer la fonction de survie (possible car X_n est une variable aléatoire positive). On a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \int_0^\infty (1-F_n(t))dt = \int_0^1 [\alpha_n + (1-\alpha_n)\exp(-t/\theta_n)]dt \\
&+ (1-\alpha_n)\int_1^\infty \exp(-t/\theta_n)dt \\
&= \alpha_n + (1-\alpha_n)\int_0^\infty \exp(-t/\theta_n)dt = \alpha_n + (1-\alpha_n)\theta_n.
\end{aligned}
$$

3) Donner l'expression de la variance de X_n.
Réponse – Il faut dans un premier temps montrer que

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \alpha_n + 2(1-\alpha_n)\theta_n^2.$$

Pour ce faire, vous pouvez utiliser comme précédemment la méthode directe ou bien intégrer la fonction de survie de X_n^2 qui est donnée par $1 - G_n$ avec

$$G_n(t) = \mathbb{P}[X_n^2 \leq t] = \mathbb{P}[X_n \leq t^{1/2}] = F_n(t^{1/2}),$$

car X_n est une variable aléatoire positive. On en déduit ensuite facilement que

$$\mathrm{Var}(X_n) = \alpha_n + 2(1-\alpha_n)\theta_n^2 - [\ \alpha_n + (1-\alpha_n)\theta_n]^2 .$$

4) A l'aide des questions 2) et 3), étudier la convergence en probabilité de X_n dans les cas suivants :

   i) $\alpha_n \to 1$ et $\theta_n \to \theta \geq 0$,
   ii) $\alpha_n \to 0$ et $\theta_n \to 0$.

Réponse – Dans le cas i) on a $\mathbb{E}(X_n) \to 1$ et $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$ donc, d'après un résultat vu en TD, X_n converge en probabilité vers 1. Dans le cas ii), $\mathbb{E}(X_n) \to 0$ et $\mathrm{Var}(X_n) \to 0$ donc X_n converge en probabilité vers 0.

5) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1-\alpha_n}{\varepsilon^2}[\ 1 - 2\theta_n(1-\theta_n)] .$$

Réponse – L'inégalité de Markov donne

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\ \mathbb{E}[(X_n-1)^2].$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_n-1)^2] &= \mathbb{E}(X_n^2) - 2\mathbb{E}(X_n) + 1 \\
&= \alpha_n + 2(1-\alpha_n)\theta_n^2 - 2\alpha_n - 2(1-\alpha_n)\theta_n + 1 \\
&= (1-\alpha_n)[1 + 2\theta_n^2 - 2\theta_n].
\end{aligned}
$$

6) On suppose pour cette question que (θ_n) est la suite constante égale à 1. Proposer une suite (α_n) pour laquelle X_n converge presque-sûrement vers 1 (justifier correctement votre choix).
Réponse — En prenant $\alpha_n = 1 - n^{-2}$ *par exemple on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(|X_n - 1| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Ainsi, d'après le corollaire du Lemme de Borel-Cantelli, on a le résultat.