Contrôle continu #3 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2023 - 2024

Durée : 3h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – On considère la fonction $F(\cdot)$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 1/4 & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ 1 - \exp(-x - 1/3) & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 3/4 & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1) La fonction $F(\cdot)$ est-elle une fonction de répartition ? Justifier votre réponse.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note $\mathbb{P}_X$ la loi de X avec $\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Quelle est la valeur de $\mathbb{P}_X(\{-1\})$? Celle de $\mathbb{P}_X([0, 1])$?

3) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?

4) Montrer qu'il existe une loi absolument continue $\mathbb{P}_X^{(1)}$, une loi discrète $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$. Vous préciserez la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et la densité de probabilité de $\mathbb{P}_X^{(1)}$.

5) On note X_1 (resp. X_2) une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$ (resp. $\mathbb{P}_X^{(2)}$). Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$. Vous donnerez les résultats en fonction de α.

6) Calculer l'espérance de X.

7) Expliquer pourquoi on a l'égalité

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(x - 1))\, dx - 1.$$

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = c \exp(-x) \exp(-\exp(-x)),$$

où c est une constante positive.

1) Quelle valeur de c doit-on prendre pour que $f(\cdot)$ soit une densité de probabilité (aide : vous pourrez effectuer le changement de variable $y = \exp(-x)$).

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_X$ qui est absolument continue de densité $f(\cdot)$. On rappelle que la constante d'Euler est donnée par

$$\gamma = -\int_0^1 \ln[-\ln(x)]dx \approx 0,577215.$$

2) Quelle intégrale faut-il calculer pour obtenir la valeur de $\mathbb{E}(X)$?

3) En effectuant le changement de variable $y = \exp(-\exp(-x))$, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de la constante d'Euler γ.

On introduit la variable aléatoire $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi uniforme sur l'intervalle $[0,4]$. On rappelle que la densité d'une loi uniforme sur $[a,b]$ est donnée par $f_U(u) = \mathbb{I}_{[a,b]}(u)/(b-a)$.

4) Quelle est la fonction de répartition de U ?

5) Calculer $\mathbb{E}(U)$.

On pose $Y := \lfloor U \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. La loi de Y est notée $\mathbb{P}_Y$.

6) Quelles sont les valeurs prises par Y (avec une probabilité non nulle) ?

7) Calculer la probabilité $\mathbb{P}_Y(\{1\})$.

8) Donner les valeurs de $I \in \mathbb{N}$ et des probabilités p_i, $i = 0, \cdots, I$ telles que

$$\mathbb{P}_Y = \sum_{i=0}^{I} p_i \delta_i.$$

9) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

10) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_Z = (\mathbb{P}_X + \mathbb{P}_Y)/2$. Donner l'expression de l'espérance de Z en fonction de la constante d'Euler.

Exercice 3 – Pour tout $r \in]0,1[$, on introduit la fonction $g_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$g_r = \sum_{i \in \mathbb{N}} r^i \mathbb{I}_{]i,i+1[}.$$

1) Donner en fonction de r la valeur de l'intégrale

$$I_r = \int_{\mathbb{R}^+} g_r d\lambda,$$

où λ est la mesure de Lebesgue. Justifier correctement toutes les étapes menant au résultat.

Pour tout $c > 0$, soit $\nu_c(\cdot)$ la fonction définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ par

$$\nu_c(A) = c \int_A g_r d\lambda.$$

2) Montrer que $\nu_c(\cdot)$ vérifie les propriétés d'une mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.

3) On pose $c_0 = 1 - r$. Calculer $\nu_{c_0}(\mathbb{R}^+)$. Qu'en déduisez vous sur la mesure $\nu_{c_0}(\cdot)$?

Soit la fonction $F : t \mapsto \nu_{c_0}(]-\infty, t])$.

4) Quelle est la valeur de $F(t)$ lorsque $t < 0$? Justifier votre réponse.

5) Montrer que $F(t) = c_0 t$ pour tout $t \in [0,1[$.

6) Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donner en fonction de r et j l'expression de la fonction $F(t)$ lorsque $t \in [j, j+1[$.

7) Montrer que $F(\cdot)$ est continue et donner l'expression de $f(t) = F'(t)$ pour tout $t \in]j, j+1[$.

8) Calculer $\int_0^\infty f(t)dt$. Qu'en déduisez vous ?

Exercice 4 – Soit $\mu(\cdot)$ une mesure de probabilité sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(]-\infty, m]) = 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(]-\infty, m-\varepsilon]\right) =: r(\varepsilon) < 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on supposera indépendantes et de même loi $\mu(\cdot)$ (i.e., pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(X \in A) = \mu(A)$). On pose enfin $M_n := \max(X_1, \cdots, X_n)$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Donner, en fonction de $r(\varepsilon)$ et de n, l'expression de $\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon)$.

2) Donner l'expression (en fonction de $r(\varepsilon)$) de

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|M_n - m| > \varepsilon).$$

3) Qu'en déduisez-vous quant à la convergence presque-sûre de la suite (M_n) ? (justifier votre réponse)

Exercice 5 – On pose $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R} \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(E))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $k \in E$ par

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times \{k\}) = \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y = k\}) = \frac{k \exp(-2) 2^{k-2}}{(k-2)!} \int_{A \cap [1, \infty[} x^{-(k+1)} dx,$$

où $c > 0$.

1) Pour tout $k \in E$, donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$.

2) Vérifier que

$$\sum_{k \in E} \mathbb{P}(Y = k) = 1.$$

Quel est le nom de la loi de la variable aléatoire $Y - 2$?

3) Donner l'expression de la fonction $F_{X|Y=k}(t) := \mathbb{P}(X \leq t \mid Y = k)$.

4) En admettant que pour tout $k \in E$,

$$\mathbb{E}(X \mid Y = k) = \int_0^\infty \left[1 - (1 - t^{-k}) \mathbb{I}_{[1, \infty[}(t)\right] dt,$$

donner l'expression la plus simple possible de la fonction $h(\cdot)$ telle que $\mathbb{E}(X \mid Y) = h(Y)$.