Contrôle continu #3 de Probabilités

CORRECTION

Année 2023 - 2024

Exercice 1 – On considère la fonction $F(\cdot)$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ 1/4 & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ 1 - \exp(-x - 1/3) & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 3/4 & \text{si } x \in [1, 2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1) La fonction $F(\cdot)$ est-elle une fonction de répartition ? Justifier votre réponse.
   Il suffit de faire la représentation graphique de $F(\cdot)$ et de constater qu'elle est croissante, continue à droite de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note $\mathbb{P}_X$ la loi de X avec $\mathbb{P}_X(]-\infty, t]) = F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Quelle est la valeur de $\mathbb{P}_X(\{-1\})$? Celle de $\mathbb{P}_X([0, 1])$?
   On a $\mathbb{P}_X(\{-1\}) = 1/4$ (c'est la hauteur du saut au point -1. De plus

$$\mathbb{P}_X([0, 1]) = F(1) - F(0^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

3) Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
   Le support de X est $\{-1\} \cup [0, 1] \cup \{2\}$.

4) Montrer qu'il existe une loi absolument continue $\mathbb{P}_X^{(1)}$, une loi discrète $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$. Vous préciserez la valeur de α, l'expression de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ et la densité de probabilité de $\mathbb{P}_X^{(1)}$.
   La somme de la hauteur des sauts est

$$1 - \alpha = \frac{1}{4} + 1 - \exp\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 + \exp\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{4} = 1 + \exp\left(-\frac{4}{3}\right) - \exp\left(-\frac{1}{3}\right).$$

   Les points de discontinuités sont -1, 0, 1 et 2 donc

$$\mathbb{P}_X^{(2)} = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\frac{1}{4}\delta_{-1} + \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right)\delta_0 + \left(\frac{3}{4} - 1 + \exp\left(-\frac{4}{3}\right)\right)\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2\right].$$

   Enfin, on a

$$F'(x) = \exp(-x - 1/3)\mathbb{I}_{[0,1]}(x),$$

   et on vérifie facilement que la fonction $f(x) = F'(x)/\alpha$ est d'intégrale 1.

5) On note X_1 (resp. X_2) une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$ (resp. $\mathbb{P}_X^{(2)}$). Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$. Vous donnerez les résultats en fonction de α.
   On a

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{\exp(-1/3)}{\alpha} \int_0^1 x \exp(-x) dx = \frac{\exp(-1/3) - 2\exp(-4/3)}{\alpha}.$$

   De plus

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{1 - \alpha} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 + \exp\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\right) = \frac{\exp(-4/3)}{1 - \alpha}.$$

6) Calculer l'espérance de X.
On a donc $\mathbb{E}(X) = \exp(-1/3) - \exp(-4/3)$.

7) Expliquer pourquoi on a l'égalité

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(x-1))\, dx - 1.$$

La variable aléatoire $Y := X + 1$ est positive. Sa fonction de répartition est $G(y) = \mathbb{P}(X \leq y - 1) = F(y-1)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + 1 = \int_0^\infty (1 - F(y-1))\, dy,$$

d'où le résultat annoncé.

Exercice 2 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = c \exp(-x) \exp\left(-\exp(-x)\right),$$

où c est une constante positive.

1) Quelle valeur de c doit-on prendre pour que $f(\cdot)$ soit une densité de probabilité (aide : vous pourrez effectuer le changement de variable $y = \exp(-x)$).
Comme $c > 0$, la fonction f est positive. Il suffit de prendre c de telle sorte que l'intégrale de f soit égale à 1. Or,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) dx = \int_0^\infty y \exp(-y) dy = 1.$$

Il faut donc prendre $c = 1$.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_X$ qui est absolument continue de densité $f(\cdot)$. On rappelle que la constante d'Euler est donnée par

$$\gamma = -\int_0^1 \ln[-\ln(x)] dx \approx 0,577215.$$

2) Quelle intégrale faut-il calculer pour obtenir la valeur de $\mathbb{E}(X)$?
Il faut calculer

$$\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) dx.$$

3) En effectuant le changement de variable $y = \exp(-\exp(-x))$, donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en fonction de la constante d'Euler γ.
Avec le changement de variable suggéré, on trouve que $\mathbb{E}(X) = \gamma$.

On introduit la variable aléatoire $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4]$. On rappelle que la densité d'une loi uniforme sur $[a, b]$ est donnée par $f_U(u) = \mathbb{I}_{[a,b]}(u)/(b - a)$.

4) Quelle est la fonction de répartition de U ?
Elle est donnée par $F_U(u) = 0$ si $u < 0$, $F_U(u) = 1$ si $u \geq 4$ et

$$F_U(u) = \frac{1}{4} \int_0^u dx = \frac{u}{4}.$$

5) Calculer $\mathbb{E}(U)$.
On a

$$\mathbb{E}(U) = \frac{1}{4} \int_0^4 x dx = \frac{16}{8} = 2.$$

On pose $Y := \lfloor U \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. La loi de Y est notée $\mathbb{P}_Y$.

6) Quelles sont les valeurs prises par Y (avec une probabilité non nulle) ?
Comme U prend ses valeurs dans $[0,4]$, il est clair que Y prend ses valeurs dans $\{0,1,2,3\}$.

7) Calculer la probabilité $\mathbb{P}_Y(\{1\})$.
On a
$$\mathbb{P}_Y(\{1\}) = \mathbb{P}(U \in [1,2[) = \frac{1}{4}.$$

8) Donner les valeurs de $I \in \mathbb{N}$ et des probabilités p_i, $i = 0, \cdots, I$ telles que
$$\mathbb{P}_Y = \sum_{i=0}^{I} p_i \delta_i.$$
On a $I = 3$ et $p_0 = \cdots = p_3 = 1/4$.

9) Donner la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.
On a
$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{3}{2}.$$

10) Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_Z = (\mathbb{P}_X + \mathbb{P}_Y)/2$. Donner l'expression de l'espérance de Z en fonction de la constante d'Euler.
On a évidemment,
$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\right) = \frac{\gamma + 3/2}{2}.$$

Exercice 3 – Pour tout $r \in]0,1[$, on introduit la fonction $g_r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$g_r = \sum_{i \in \mathbb{N}} r^i \mathbb{I}_{]i,i+1[}.$$

1) Donner en fonction de r la valeur de l'intégrale
$$I_r = \int_{\mathbb{R}^+} g_r d\lambda,$$
où λ est la mesure de Lebesgue. Justifier correctement toutes les étapes menant au résultat.
Il faut calculer
$$I_r = \int_{\mathbb{R}^+} \sum_{i \in \mathbb{N}} r^i \mathbb{I}_{]i,i+1[} d\lambda.$$
La fonction $r^i \mathbb{I}_{]i,i+1[}$ étant positive pour tout $i \in \mathbb{N}$, une conséquence du théorème de la convergence monotone assure que
$$I_r = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^+} r^i \mathbb{I}_{]i,i+1[} d\lambda = \sum_{i \in \mathbb{N}} r^i \lambda(]i,i+1[) = \sum_{i \in \mathbb{N}} r^i = \frac{1}{1-r}.$$

Pour tout $c > 0$, soit $\nu_c(\cdot)$ la fonction définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ par
$$\nu_c(A) = c \int_A g_r d\lambda.$$

2) Montrer que $\nu_c(\cdot)$ vérifie les propriétés d'une mesure sur $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.
Tout d'abord, il est évident que $\nu_c(\emptyset) = 0$. De plus, soit (A_n) une suite déléments disjoints de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$, on a

$$\nu_c\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = c\int_{\mathbb{R}^+} g_r \mathbb{I}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} d\lambda.$$

Les ensembles (A_n) étant disjoints,

$$\mathbb{I}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{I}_{A_n}.$$

Comme g_r est positive, une conséquence du théorème de la convergence monotone assure que

$$\nu_c\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = c\sum_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^+} g_r \mathbb{I}_{A_n} d\lambda = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_c(A_n).$$

3) On pose $c_0 = 1 - r$. Calculer $\nu_{c_0}(\mathbb{R}^+)$. Qu'en déduisez vous sur la mesure $\nu_{c_0}(\cdot)$?
On a $\nu_{c_0}(\mathbb{R}^+) = (1-r)I_r = 1$. Ainsi, $\nu_{c_0}(\cdot)$ est une mesure de probabilité.

Soit la fonction $F : t \mapsto \nu_{c_0}(]-\infty, t])$.

4) Quelle est la valeur de $F(t)$ lorsque $t < 0$? Justifier votre réponse.
On a

$$F(t) = c_0\int_{\mathbb{R}^+} g_r \mathbb{I}_{]-\infty,t]} d\lambda = c_0\int_{\mathbb{R}^+}\sum_{i\in\mathbb{N}} r^i \mathbb{I}_{]i,i+1[\cap]-\infty,t]} d\lambda.$$

En utilisant encore une conséquence du théorème de la convergence monotone,

$$F(t) = c_0\sum_{i\in\mathbb{N}} r^i \int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{I}_{]i,i+1[\cap]-\infty,t]} d\lambda.$$

Or, si $t < 0$, $]i, i+1[\cap]-\infty, t] = \emptyset$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Donc $F(t) = 0$.

5) Montrer que $F(t) = c_0 t$ pour tout $t \in [0, 1[$.
Lorsque $t \in [0, 1[$, on a $]0, 1[\cap]-\infty, t] =]0, t]$ et $]i, i+1[\cap]-\infty, t] = \emptyset$ pour tout $i \geq 1$. Ainsi,

$$F(t) = c_0 r^0 \lambda(]0, t]) = c_0 t.$$

6) Soit $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Donner en fonction de r et j l'expression de la fonction $F(t)$ lorsque $t \in [j, j+1[$.
Pour tout $i \leq j-1$, on a $]i, i+1[\cap]-\infty, t] =]i, i+1[$. Pour $i = j$, on a $]i, i+1[\cap]-\infty, t] =]j, t[$. Enfin, si $i > j$ (i.e., $i \geq j+1$), on a $]i, i+1[\cap]-\infty, t] = \emptyset$. Ainsi,

$$F(t) = c_0\left\{\sum_{i=0}^{j-1} r^i + r^j(t-j)\right\} = c_0\left\{\frac{1-r^j}{1-r} + r^j(t-j)\right\}.$$

7) Montrer que $F(\cdot)$ est continue et donner l'expression de $f(t) = F'(t)$ pour tout $t \in]j, j+1[$.
Evidemment, $F(\cdot)$ est continue sur tous les intervalles $]j, j+1[$ pour $j \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer la continuité aux points $j \in \mathbb{N}$. Pour $j = 0$, on a $F(0) - F(0^-) = c_0 \times 0 - 0 = 0$. Pour $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$$F(j) - F(j^-) = c_0\frac{1-r^j}{1-r} - \lim_{t\to j^-} c_0\left\{\frac{1-r^{j-1}}{1-r} + r^{j-1}(t-j+1)\right\} = 0.$$

Ainsi, $F(\cdot)$ est bien continue. De plus, si $t \in]j, j+1[$, on a $F'(t) = c_0 r^j$.

8) Calculer $\int_0^\infty f(t)dt$. Qu'en déduisez vous ?
D'après la question précédente,

$$f(t) = c_0 \sum_{j\in\mathbb{N}} r^j \mathbb{I}_{]j,j+1[}(t).$$

Ainsi, en utilisant toujours la même conséquence du théorème de la convergence monotone,

$$\int_0^\infty f(t)dt = c_0 \int_0^\infty \sum_{j\in\mathbb{N}} r^j \mathbb{I}_{]j,j+1[}(t)dt = c_0 \sum_{j\in\mathbb{N}} r^j = 1.$$

On en déduit donc que ν_{c_0} est une loi absolument continue de densité $f(\cdot)$.

Exercice 4 – Soit $\mu(\cdot)$ une mesure de probabilité sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\mu(]-\infty, m]) = 1$ et, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(]-\infty, m-\varepsilon]\right) =: r(\varepsilon) < 1.$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que l'on supposera indépendantes et de même loi $\mu(\cdot)$ (i.e., pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(X \in A) = \mu(A)$). On pose enfin $M_n := \max(X_1, \cdots, X_n)$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Donner, en fonction de $r(\varepsilon)$ et de n, l'expression de $\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon)$.
Tout d'abord, remarquons que $\mathbb{P}(M_n \leq m) = [\mathbb{P}(X_1 \leq m)]^n = [\mu(]-\infty, m])]^n = 1$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq m - \varepsilon) = [r(\varepsilon)]^n.$$

2) Donner l'expression (en fonction de $r(\varepsilon)$) de

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - m| > \varepsilon).$$

On a d'après la question précédente que

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - m| > \varepsilon) = \sum_{n\geq 1} [r(\varepsilon)]^n = \frac{r(\varepsilon)}{1 - r(\varepsilon)} < \infty.$$

3) Qu'en déduisez-vous quant à la convergence presque-sûre de la suite (M_n) ? (justifier votre réponse)
Il suffit d'utiliser le corollaire du Lemme de Borel-Cantelli et le résultat de la question 2) pour montrer que (M_n) converge presque-sûrement vers m.

Exercice 5 – On pose $E = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $(X, Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R} \times E, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(E))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $k \in E$ par

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times \{k\}) = \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y = k\}) = \frac{k \exp(-2) 2^{k-2}}{(k-2)!} \int_{A\cap[1,\infty[} x^{-(k+1)} dx,$$

où $c > 0$.

1) Pour tout $k \in E$, donner l'expression de la probabilité $\mathbb{P}(Y = k)$.
Soit $k \in E$, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\{X \in \mathbb{R}\} \cap \{Y = k\}) = \frac{k \exp(-2) 2^{k-2}}{(k-2)!} \int_1^\infty x^{-(k+1)} dx = \frac{\exp(-2) 2^{k-2}}{(k-2)!}.$$

2) Vérifier que
$$\sum_{k\in E} \mathbb{P}(Y=k) = 1.$$
Quel est le nom de la loi de la variable aléatoire $Y-2$?
On a
$$\sum_{k\in E} \mathbb{P}(Y=k) = \exp(-2)\sum_{k\geq 2}\frac{2^{k-2}}{(k-2)!} = \exp(-2)\sum_{k\geq 0}\frac{2^k}{k!} = 1.$$
On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(Y-2=k) = \mathbb{P}(Y=k+2) = \exp(-2)\frac{2^k}{k!},$$
qui est la probabilité d'une loi de Poisson de paramètre 2.

3) Donner l'expression de la fonction $F_{X|Y=k}(t) := \mathbb{P}(X \leq t \mid Y=k)$.
Remarquons tout d'abord que
$$F_{X|Y=k}(t) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y=k)}\mathbb{P}(\{X\leq t\}\cap\{Y=k\}) = k\int_{]-\infty,t]\cap[1,\infty[} x^{-(k+1)}dx.$$
Donc, si $t<1$, $F_{X|Y=k}(t)=0$. Si $t\geq 1$,
$$F_{X|Y=k}(t) = k\int_1^{\infty} x^{-(k+1)}dx = 1 - t^{-k}.$$

4) En admettant que pour tout $k\in E$,
$$\mathbb{E}(X \mid Y=k) = \int_0^{\infty}\left[1-(1-t^{-k})\mathbb{I}_{[1,\infty[}(t)\right]dt,$$
donner l'expression de $\mathbb{E}(X \mid Y)$.
Il suffit de calculer pour tout $k\in E$,
$$\int_0^{\infty}\left[1-(1-t^{-k})\mathbb{I}_{[1,\infty[}(t)\right]dt = 1+\int_1^{\infty} t^{-k}dt = 1+\left[\frac{1}{1-k}t^{1-k}\right]_1^{\infty} = 1-\frac{1}{1-k} = \frac{k}{k-1}.$$
Ainsi, $\mathbb{E}(X \mid Y) = Y/(Y-1)$.