

Contrôle continu #3 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2024 - 2025

Durée : 2h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice préliminaire – Démontrer les égalités ci-dessous (vous aurez à les utiliser dans la suite).

i) Soit $r \in]0, 1[$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2} \text{ et } \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)r^{i-2} = \frac{2}{(1-r)^3}.$$

(On admettra que l'on peut intervertir les signes somme et dérivée.)

ii) En faisant une intégration par partie, montrer que

$$\int_0^1 t \ln(t) dt = -\frac{1}{4}.$$

Exercice 1 – Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1/x) & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admettra que f est une fonction mesurable.

1) Montrer que f est une densité.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire dont la loi \mathbb{P}_X admet f pour densité.

2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X .

3) Montrer que la variable aléatoire X est intégrable (i.e., $\mathbb{E}(|X|) < \infty$).

4) Calculer de deux façons différentes l'espérance de X .

Exercice 2 – Soit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 2, \\ -3|x| + 6 & \text{si } |x| \in [1, 2[, \\ 2|x| + 1 & \text{si } |x| \in [0, 1[. \end{cases}$$

1) Représentez graphiquement la fonction f .

- 2) Donner l'argument permettant de prouver que f est une fonction mesurable.
- 3) Donner l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, t])$ lorsque : i) $t = -1/2$; ii) $t = 1/2$; iii) $t = 1$ et iv) $t = 3$.
- 4) Donner la constante $c \in \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = cf(x)$ est une densité.
- 5) Soit μ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \int_A g d\lambda = \int_A g(x) dx.$$

Soit $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = x$. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} h d\mu.$$

Exercice 3 – On lance de manière indépendante une pièce jusqu'à obtenir 2 fois le côté "face". La probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0, 1[$.

- 1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ où pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est le nombre de "pile" obtenu.

- 2) Donner l'ensemble E des réalisations possibles de la variable aléatoire X .
- 3) Donner, en fonction de p , l'expression des probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$.
- 4) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
- 5) On pose $q = 1 - p$. En fonction de q , donner l'expression de l'espérance de X .

Exercice 4 – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X avec

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, x]) =: F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2, \\ (x+2)/6 & \text{si } x \in [-2, 0[, \\ 1/2 & \text{si } x \in [0, 2[, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- 1) Quelles sont les valeurs prises par la fonction X ?
- 2) Représentez graphiquement la fonction F .
- 3) Ecrire la loi \mathbb{P}_X sous la forme $\alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité. Vous donnerez la valeur de α , l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ ainsi que la densité de la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$.

- 4) Calculer $\mathbb{E}(|X|)$. La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 5 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = (\mu_1 + 2\mu_2)/3$ avec

$$\mu_1 := \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \delta_k,$$

et, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_2(A) = \int_A 3x^{-4} \mathbb{I}_{[1, \infty[}(x) dx.$$

- 1) Vérifier que l'on a bien $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$.

On note F la fonction de répartition de X .

- 2) Quelle est la valeur de $F(2)$?
- 3) Quelle est la probabilité de l'événement $\{X = 2\}$?
- 4) Donner l'expression de la fonction de répartition F .
- 5) Calculer de deux manières différentes l'espérance $\mathbb{E}(X)$.