

Contrôle continu #3 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2024 - 2025

Durée : 2h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Exercice préliminaire – Démontrer les égalités ci-dessous (vous aurez à les utiliser dans la suite).

i) Soit $r \in]0, 1[$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2} \text{ et } \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)r^{i-2} = \frac{2}{(1-r)^3}.$$

(On admettra que l'on peut intervertir les signes somme et dérivée.)

ii) En faisant une intégration par partie, montrer que

$$\int_0^1 t \ln(t) dt = -\frac{1}{4}.$$

Correction : On a

$$\sum_{i=1}^{\infty} ir^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} r^i = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i=1}^{\infty} r^i = \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

De plus,

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)r^{i-2} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^i = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{r^2}{1-r} = \frac{2[(1-r)^2 + r(2-r)]}{(1-r)^3} = \frac{2}{(1-r)^3}.$$

Enfin, en faisant une intégration par partie,

$$\int_0^1 t \ln(t) dt = [t^2(\ln(t) - 1)]_0^1 - \int_0^1 t(\ln(t) - 1) dt = -1 - \int_0^1 t \ln(t) + \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$2 \int_0^1 t \ln(t) dt = -\frac{1}{2},$$

conduisant au résultat attendu.

Exercice 1 – Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1/x) & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admettra que f est une fonction mesurable.

- 1) Montrer que f est une densité.

Correction : Il suffit de remarquer que f est bien positive et que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \ln(1/x)dx = -[x(\ln(x) - 1)]_0^1 = 1.$$

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire dont la loi \mathbb{P}_X admet f pour densité.

- 2) Donner l'expression de la fonction de répartition de X .

Correction : Remarquons tout d'abord que le support de \mathbb{P}_X est $]0, 1[$. Ainsi, si $t < 0$, $F(t) = 0$ et si $t \geq 1$, on a $F(t) = 1$. Enfin, si $t \in]0, 1[$,

$$F(t) = \int_0^t \ln(1/x)dx = -t(\ln(t) - 1).$$

On vérifie bien que F est une fonction continue, dérivable partout sauf en 0 (donc dérivable presque-partout).

- 3) Montrer que la variable aléatoire X est intégrable (i.e., $\mathbb{E}(|X|) < \infty$).

Correction : Le support de \mathbb{P}_X est $]0, 1[$ donc $|X| \leq 1$. Ainsi, $\mathbb{E}(|X|) \leq 1$ donc X est bien intégrable.

- 4) Calculer de deux façons différentes l'espérance de X .

Correction : La variable aléatoire X étant positive, on peut utiliser la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t))dt.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 (1 + t \ln(t) - t)dt = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

On peut également utiliser le calcul direct

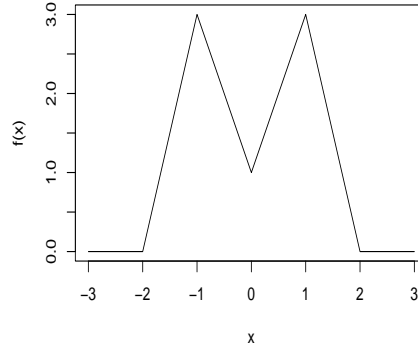
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^1 x \ln(1/x)dx = - \int_0^1 x \ln(x)dx = \frac{1}{4}.$$

Exercice 2 – Soit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 2, \\ -3|x| + 6 & \text{si } |x| \in [1, 2[, \\ 2|x| + 1 & \text{si } |x| \in [0, 1[. \end{cases}$$

- 1) Représentez graphiquement la fonction f .

Correction :



- 2) Donner l'argument permettant de prouver que f est une fonction mesurable.
Correction : Il suffit ici de remarquer que f est une fonction continue sur \mathbb{R} donc mesurable.

- 3) Donner l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, t])$ lorsque : i) $t = -1/2$; ii) $t = 1/2$; iii) $t = 1$ et iv) $t = 3$.

Correction : On a

$$i) f^{-1}(]-\infty, -1/2]) = \emptyset; \quad ii) f^{-1}(]-\infty, 1/2]) =]-\infty, -11/6] \cup [11/6, \infty[\\ iii) f^{-1}(]-\infty, 1]) =]-\infty, -5/3] \cup \{0\} \cup [5/3, \infty[; \quad iv) f^{-1}(]-\infty, 3]) = \mathbb{R}.$$

- 4) Donner la constante $c \in \mathbb{R}$ pour laquelle la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = cf(x)$ est une densité.

Correction : Dans un premier temps, il faut que $c > 0$ pour que la fonction g soit positive. Il faut ensuite trouver c pour que g s'intègre à 1. On a, en remarquant que f est symétrique et définie sur $[-2, 2]$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx = 2 \left\{ \int_0^1 (2x+1) dx + \int_1^2 (-3x+6) dx \right\} = 7.$$

Il faut donc prendre $c = 1/7$.

- 5) Soit μ la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \int_A g d\lambda = \int_A g(x) dx.$$

Soit $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = x$. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} h d\mu.$$

Correction : D'après le cours, on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} h d\mu = \int_{\mathbb{R}} h g d\lambda = \int_{\mathbb{R}} x g(x) dx.$$

Ainsi, en remarquant que la fonction $x \mapsto xg(x)$ est impaire, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h d\mu = 0.$$

Exercice 3 – On lance de manière indépendante une pièce jusqu'à obtenir 2 fois le côté "face". La probabilité d'obtenir "face" est $p \in]0, 1[$.

- 1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Correction : Une façon possible de décrire l'ensemble des réalisations possibles est de prendre $\Omega = \{(i, j); 1 \leq i < j\}$ où l'élément (i, j) correspond à l'obtention du premier "face" lors du i -ième lancer et du second "face" au j -ième lancer. L'ensemble Ω est dénombrable, on prend donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Enfin la mesure de probabilité est donnée pour tout $(i, j) \in \Omega$ par

$$\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = p^2(1-p)^{j-2}.$$

On vérifie que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \mathbb{P}(\{(i, j)\}) &= \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \sum_{j=2}^{\infty} (j-1)p^2(1-p)^{j-2} \\ &= p^2 \sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} = 1. \end{aligned}$$

On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ où pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega)$ est le nombre de "pile" obtenu.

- 2) Donner l'ensemble E des réalisations possibles de la variable aléatoire X .

Correction : On a évidemment que $E = \mathbb{N}$.

- 3) Donner, en fonction de p , l'expression des probabilités suivantes :

$\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$.

Correction : L'événement $\{X = 0\}$ est réalisé si on obtient deux "face" lors des deux premiers lancers. Donc $\mathbb{P}(X = 0) = p^2$. L'événement $\{X = 1\}$ est réalisé si on effectue 3 lancers avec un "pile" au premier ou au deuxième lancer. Ainsi, $\mathbb{P}(X = 1) = 2p^2(1-p)$

- 4) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

Correction : Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $\{X_n = k\}$ est réalisé si on a effectué $k+2$ lancers où, lors des $k+1$ premiers lancers, le premier côté "face" est

obtenu au lancer numéro 1 ou au lancer numéro 2 ou, ..., au $k + 1$ -ième lancer. On en déduit que

$$\mathbb{P}(X_n = k) = (k + 1)p^2(1 - p)^k.$$

On vérifie bien que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} = 1.$$

- 5) On pose $q = 1 - p$. En fonction de q , donner l'expression de l'espérance de X .

Correction : La variable aléatoire X étant positive, l'écriture $\mathbb{E}(X)$ a un sens. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} k(k + 1)(1 - p)^k \\ &= p^2(1 - p) \sum_{k=1}^{\infty} k(k + 1)(1 - p)^{k-1} = p^2(1 - p) \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)(1 - p)^{k-2}. \end{aligned}$$

En posant $q = 1 - p$ et en utilisant le résultat de l'exercice préliminaire, on a donc

$$\mathbb{E}(X) = q(1 - q)^2 \sum_{k \geq 2} k(k - 1)q^{k-2} = q(1 - q)^2 \frac{2}{(1 - q)^3} = \frac{2q}{1 - q}.$$

Exercice 4 – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi \mathbb{P}_X avec

$$\mathbb{P}_X(]-\infty, x]) =: F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2, \\ (x + 2)/6 & \text{si } x \in [-2, 0[, \\ 1/2 & \text{si } x \in [0, 2[, \\ 1 - \exp(-x) & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

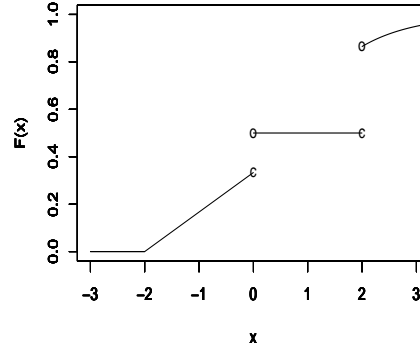
- 1) Quelles sont les valeurs prises par la fonction X ?

Correction : Il faut simplement repérer les ensembles sur lesquels la fonction F est strictement croissante. Ici, le support est l'ensemble

$$\mathcal{S} =]-2, 0] \cup [2, \infty[.$$

- 2) Représentez graphiquement la fonction F .

Correction :



- 3) Ecrire la loi \mathbb{P}_X sous la forme $\alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi à densité. Vous donnerez la valeur de α , l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ ainsi que la densité de la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$.

Correction : Tout d'abord, pour trouver α , on somme les hauteurs des sauts de discontinuité. On trouve $\alpha = (1/2 - 1/3) + (1 - \exp(-2) - 1/2) = 2/3 - \exp(-2)$. La loi discrète $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{6} \delta_0 + \left(\frac{1}{2} - \exp(-2) \right) \delta_2 \right).$$

Enfin, la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est

$$f(x) = \frac{1}{1-\alpha} F'(x) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{6} \mathbb{I}_{]-2,0[}(x) + \exp(-x) \mathbb{I}_{]2,\infty[}(x) \right).$$

On vérifie facilement que la fonction f est positive et s'intègre à 1.

- 4) Calculer $\mathbb{E}(|X|)$. La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.

Correction : On a

$$\mathbb{E}(|X|) = \int_{\Omega} |X| d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(2)}(x).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) = 2 \times \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} - \exp(-2) \right) = \frac{1 - 2\exp(-2)}{\alpha}.$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) = \int_{\mathbb{R}} |x| f(x) dx = \frac{1}{1-\alpha} \left(-\frac{1}{6} \int_{-2}^0 x dx + \int_2^{\infty} x \exp(-x) dx \right).$$

Or, en effectuant une intégration par partie,

$$\int_2^{\infty} x \exp(x) dx = 3 \exp(-2).$$

En conclusion,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{3} + 3 \exp(-2) \right),$$

ce qui nous conduit à

$$\mathbb{E}(|X|) = 1 - 2 \exp(-2) + \frac{1}{3} + 3 \exp(-2) = \frac{4}{3} + \exp(-2) < \infty.$$

La variable aléatoire X est donc intégrable. Le calcul de $\mathbb{E}(X)$ est très similaire.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(2)}(x).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) = \frac{1 - 2 \exp(-2)}{\alpha}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{6} \int_{-2}^0 x dx + \int_2^{\infty} x \exp(-x) dx \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(-\frac{1}{3} + 3 \exp(-2) \right), \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à

$$\mathbb{E}(X) = 1 - 2 \exp(-2) - \frac{1}{3} + 3 \exp(-2) = \frac{2}{3} + \exp(-2).$$

Exercice 5 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = (\mu_1 + 2\mu_2)/3$ avec

$$\mu_1 := \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \delta_k,$$

et, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu_2(A) = \int_A 3x^{-4} \mathbb{I}_{[1, \infty[}(x) dx.$$

- 1) Vérifier que l'on a bien $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1$.

Correction : Tout d'abord,

$$\mu_1(\mathbb{R}) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1.$$

De plus

$$\mu_2(\mathbb{R}) = 3 \int_1^{\infty} x^{-4} dx = -[x^{-3}]_1^{\infty} = 1.$$

On a donc bien que $\mathbb{P}_X(\mathbb{R}) = 1/3 + 2/3 = 1$.

On note F la fonction de répartition de X .

- 2) Quelle est la valeur de $F(2)$?

Correction : On a $F(-1) = \mathbb{P}_X(]-\infty, 2])$. Ainsi,

$$F(1) = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^3 \delta_k(]-\infty, 2]) + \frac{2}{3} \int_{-\infty}^2 3x^{-4} \mathbb{I}_{[1, \infty[}(x) dx.$$

Or,

$$\sum_{k=1}^3 \delta_k(]-\infty, 2]) = 2,$$

et

$$\int_{-\infty}^2 3x^{-4} \mathbb{I}_{[1, \infty[}(x) dx = \int_1^2 3x^{-4} dx = -[x^{-3}]_1^2 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Donc,

$$F(2) = \frac{2}{9} + \frac{7}{12} = \frac{29}{36}$$

- 3) Quelle est la probabilité de l'événement $\{X = 2\}$

Correction : On a

$$\mathbb{P}(X = 2) = F(2) - \lim_{x \rightarrow 2^-} F(x).$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = F(2) - \frac{1}{9},$$

donc $\mathbb{P}(X = 2) = 1/9$.

- 4) Donner l'expression de la fonction de répartition F .

Correction : En remarquant que

$$F(t) = \frac{1}{9} \sum_{k=1}^3 \delta_k(]-\infty, t]) + \frac{2}{3} \int_{-\infty}^t 3x^{-4} \mathbb{I}_{[1, \infty[}(x) dx,$$

on a

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1/9 + 2/3(1 - t^{-3}) = 7/9 - 2t^{-3}/3 & \text{si } t \in [1, 2[, \\ 2/9 + 2/3(1 - t^{-3}) = 8/9 - 2t^{-3}/3 & \text{si } t \in [2, 3[, \\ 1/3 + 2/3(1 - t^{-3}) = 1 - 2t^{-3}/3 & \text{si } t \geq 3. \end{cases}$$

5) Calculer de deux manières différentes l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

Correction :

Méthode 1 – On utilise le théorème de transfert pour obtenir

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{R}} x d\mu_1(x) + \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}} x d\mu_2(x).$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_1(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \int_{\mathbb{R}} x d\delta_k(x) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 k = 2.$$

De plus

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_2(x) = 3 \int_1^{\infty} x^{-3} dx = \frac{3}{2}.$$

En conclusion,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Méthode 2 – La variable aléatoire X étant positive, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt = 1 + \int_1^{\infty} (1 - F(t)) dt \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_1^{\infty} t^{-3} dt = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$