

Contrôle continu #3 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques Appliquées” et “Actuariat”
Année 2025 - 2026

Durée : 2h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questions de cours –

- 1) Soit E un ensemble quelconque. Donnez les propriétés vérifiées par une tribu \mathcal{E} de parties de E .
- 2) Soit (E, \mathcal{E}) un espace mesurable. Quelles propriétés doit vérifier l'application $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ pour être une mesure ?
- 3) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une fonction. Quelle propriété doit vérifier X pour être une variable aléatoire ?
- 4) Donnez la définition de la loi, que l'on notera \mathbb{P}_X , d'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

Exercice 1 – Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $c \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{|x-1|}{2}\right).$$

- 1) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que f soit une densité ?

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi continue \mathbb{P}_X qui admet f pour densité.

- 2) Donnez l'expression de la fonction de répartition F de X . *Aide : vous calculerez $F(t)$ pour $t < 1$ puis pour $t \geq 1$.*
- 3) Calculez $\mathbb{E}(|X-1|)$ et en déduire l'existence de l'espérance de X .
- 4) Calculez l'espérance de X .

Exercice 2 – Soit $E = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in]0, 1[$. On considère la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ de loi

$$\mathbb{P}_X = c \sum_{i \geq 1} r^i \delta_i.$$

- 1) Quelle est l'expression de c en fonction de r ?
- 2) Quel est le nom de la loi de X ?
- 3) Après en avoir justifié l'existence, calculez l'espérance de $Y := r^X$.

Exercice 3 – On considère la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x < -1 \\ 1 - \exp[-(x+1)]/2 & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

- 1) Représentez graphiquement la fonction F et montrez que F est une fonction de répartition (*à titre indicatif*, $\exp(-1) \approx 0.368$).

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X^{-1}(] - \infty, t]) = F(t)$.

- 2) Donnez la valeur de $\alpha \in]0, 1[$, la loi discrète $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$ telles que $\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbb{P}_X^{(2)}$ où \mathbb{P}_X est la loi de X .
- 3) Calculez l'espérance de X (vous pourrez donner le résultat en fonction de α).

Exercice 4 – Sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la **mesure** μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{21} \delta_{-1}(A) + \frac{12}{7} \int_{A \cap]0, \infty[} \exp(-2x) dx + \frac{2}{21} \delta_1(A).$$

- 1) Vérifiez que μ est une mesure de probabilité.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$.

- 2) Donnez l'expression de la fonction de répartition F de X .
- 3) Ecrivez la loi \mathbb{P}_X sous la forme $\alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi de densité f (vous préciserez la valeur de α , l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et l'expression de la densité f).
- 4) Quel est le support de X (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X ?
- 5) On admettra que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Calculez l'espérance de X .

Exercice 5 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbb{P}_X^{(2)}$ avec $\alpha = 1/2$, $\mathbb{P}_X^{(1)} = (\delta_0 + 2\delta_1 + 3\delta_2)/6$ et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ une loi continue de densité

$$f(x) = c (\mathbb{I}_{[0, 1/2]}(x) + x \mathbb{I}_{[1, 2]}(x))$$

- 1) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que f soit une densité de probabilité ?
- 2) Donnez l'expression de la fonction $F(t) := \mathbb{P}_X(] - \infty, t])$.
- 3) Après avoir justifié son existence, calculez l'espérance de X de deux façons différentes.