

Contrôle continu #3 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2025 - 2026

Correction

Exercice 1 – Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $c \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{|x-1|}{2}\right).$$

- 1) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que f soit une densité ?
Tout d'abord, il faut que $c > 0$ pour que la fonction f soit positive. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|x-1|}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^1 \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) dx + \int_1^{\infty} \exp\left(\frac{1-x}{2}\right) dx.$$

Un calcul facile montre que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{|x-1|}{2}\right) dx = 4.$$

Il faut donc prendre $c = 4$.

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi continue \mathbb{P}_X qui admet f pour densité.

- 2) Donnez l'expression de la fonction de répartition F de X . *Aide : vous calculerez $F(t)$ pour $t < 1$ puis pour $t \geq 1$.*
On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(t) &:= \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{\Omega} \mathbb{I}_{]-\infty, t]}(X) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{]-\infty, t]}(x) d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^t f(x) dx. \end{aligned}$$

Donc, si $t < 1$,

$$F(t) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

et si $t \geq 1$,

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int_1^t \exp\left(\frac{1-x}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \left(2 - \exp\left(\frac{1-t}{2}\right)\right).$$

3) Calculez $\mathbb{E}(|X - 1|)$ et en déduire l'existence de l'espérance de X .

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X - 1|) &= \int_{\mathbb{R}} |x - 1|f(x)dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^1 (1 - x) \exp\left(\frac{x - 1}{2}\right) dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_1^{\infty} (x - 1) \exp\left(\frac{1 - x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx = 2.\end{aligned}$$

Donc l'espérance de $X - 1$ existe ce qui implique évidemment que celle de X existe également.

4) Calculez l'espérance de X .

De la même façon que pour la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X - 1) &= \int_{\mathbb{R}} |x - 1|f(x)dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^1 (x - 1) \exp\left(\frac{x - 1}{2}\right) dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_1^{\infty} (x - 1) \exp\left(\frac{1 - x}{2}\right) dx \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} x \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx = 0.\end{aligned}$$

On en déduit facilement que $\mathbb{E}(X) = 1$.

Exercice 2 – Soit $E = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $r \in]0, 1[$. On considère la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ de loi

$$\mathbb{P}_X = c \sum_{i \geq 1} r^i \delta_i.$$

1) Quelle est l'expression de c en fonction de r ?

La valeur de c est telle que

$$c \sum_{i \geq 1} r^i = 1.$$

Comme

$$\sum_{i \geq 1} r^i = \frac{r}{1 - r},$$

on en déduit que $c = (1 - r)/r$.

2) Quel est le nom de la loi de X ?

D'après la question précédente, pour $k \in E$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1 - r}{r} r^k = (1 - r)r^{k-1}.$$

On reconnaît donc une loi géométrique de paramètre $p = 1 - r$.

- 3) Après en avoir justifié l'existence, calculez l'espérance de $Y := r^X$.
 Il est clair que Y est positive et de plus $Y < 1$ ce qui justifie l'existence de l'espérance de Y . On a

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i \geq 1} r^i (1-r) r^{i-1} = r(1-r) \sum_{i \geq 1} r^{2(i-1)} = r(1-r) \frac{1}{1-r^2} = \frac{r}{1+r}.$$

Exercice 3 – On considère la fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{si } x < -1 \\ 1 - \exp[-(x+1)]/2 & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

- 1) Représentez graphiquement la fonction F et montrez que F est une fonction de répartition (à titre indicatif, $\exp(-1) \approx 0.368$).
 En traçant le graphe de F , il apparaît clairement que la fonction est croissante, continue à droite avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Donc F est bien une fonction de répartition.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X^{-1}(\cdot) - \infty, t]] = F(t)$.

- 2) Donnez la valeur de $\alpha \in]0, 1[$, la loi discrète $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$ telles que $\mathbb{P}_X = \alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha) \mathbb{P}_X^{(2)}$ où \mathbb{P}_X est la loi de X .

La loi discrète est donnée par $\mathbb{P}_X^{(1)} = \delta_{-1}$. La valeur de $\alpha \in]0, 1[$ est ici la hauteur du saut au point $x = -1$. Donc $\alpha = 1/2 - \exp(-1)$. Enfin, la densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est

$$f(t) = \frac{F'(t)}{1-\alpha} = \begin{cases} \exp(x)/(1-\alpha) & \text{si } x < -1, \\ \exp[-(x+1)]/[2(1-\alpha)] & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

- 3) Calculez l'espérance de X (vous pourrez donner le résultat en fonction de α).

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(1)}(x) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X^{(2)}(x) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} x d\delta_{-1}(x) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx \\ &= -\alpha + \int_{-\infty}^{-1} x \exp(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^{\infty} x \exp(-(x+1)) dx \\ &= -\alpha + \int_{-\infty}^{-1} x \exp(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x-1) \exp(-x) dx \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties, la première intégrale est égale à $-2 \exp(-1)$. De plus, la deuxième intégrale est égale à $\Gamma(2) - \Gamma(1) = 1 - 1 = 0$. On trouve donc

$$\mathbb{E}(X) = -\alpha - 2 \exp(-1) = -\exp(-1) - 1/2.$$

Exercice 4 – Sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on considère la **mesure** μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{21} \delta_{-1}(A) + \frac{12}{7} \int_{A \cap [0, \infty[} \exp(-2x) dx + \frac{2}{21} \delta_1(A).$$

- 1) Vérifiez que μ est une mesure de probabilité.
Il suffit de vérifier que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. On a

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{R}) &= \frac{1}{21} \delta_{-1}(\mathbb{R}) + \frac{12}{7} \int_0^\infty \exp(-2x) dx + \frac{2}{21} \delta_1(\mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{12}{7} \left[-\frac{1}{2} \exp(-2x) \right]_0^\infty = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1. \end{aligned}$$

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$.

- 2) Donnez l'expression de la fonction de répartition F de X .
La fonction de répartition de X est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $F(t) = \mu(]-\infty, t])$. On a $F(t) = 0$ si $t < -1$. Si $t \in [-1, 0[$, $F(t) = 1/21$. Si $t \in [0, 1[$,

$$F(t) = \frac{1}{21} + \frac{12}{7} \int_0^t \exp(-2x) dx = \frac{1}{21} + \frac{6}{7} [1 - \exp(-2t)].$$

Enfin, si $t \geq 1$,

$$F(t) = \frac{1}{7} + \frac{12}{7} \int_0^t \exp(-2x) dx = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} [1 - \exp(-2t)].$$

En conclusion,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1, \\ 1/21 & \text{si } t \in [-1, 0[, \\ 1/21 + 6[1 - \exp(-2t)]/7 & \text{si } t \in [0, 1[, \\ 1/7 + 6[1 - \exp(-2t)]/7 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

- 3) Ecrivez la loi \mathbb{P}_X sous la forme $\alpha \mathbb{P}_X^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbb{P}_X^{(2)}$ où $\alpha \in]0, 1[$, $\mathbb{P}_X^{(1)}$ est une loi discrète et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est une loi de densité f (vous préciserez la valeur

de α , l'expression de $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et l'expression de la densité f).
 Il y a deux sauts en -1 et 1 de hauteur $1/21$ et $2/21$ respectivement. Donc

$$\alpha = \frac{1}{7},$$

et

$$\mathbb{P}_X^{(1)} = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{2}{3}\delta_1.$$

Enfin, la densité de $\mathbb{P}_X^{(2)}$ est

$$f(t) = \frac{1}{1-\alpha}F'(t) = \frac{7}{6} \times \frac{12}{7} \exp(-2t)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(t) = 2 \exp(-2t)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(t).$$

- 4) Quel est le support de X (c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X ?
 Le support de X est l'ensemble $\{-1\} \cup]0, \infty[$.
- 5) On admettra que $\mathbb{E}(|X|) < \infty$. Calculez l'espérance de X .
 L'espérance de X est égale à $\alpha\mathbb{E}(X_1) + (1-\alpha)\mathbb{E}(X_2)$ où X_1 suit la loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$
 et X_2 la loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$. On a

$$\mathbb{E}(X_1) = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

et

$$\mathbb{E}(X_2) = 2 \int_0^\infty x \exp(-2x) dx = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{21} + \frac{3}{7} = \frac{10}{21}.$$

Exercice 5 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$ avec $\alpha = 1/2$, $\mathbb{P}_X^{(1)} = (\delta_0 + 2\delta_1 + 3\delta_2)/6$ et $\mathbb{P}_X^{(2)}$ une loi continue de densité

$$f(x) = c (\mathbb{I}_{[0,1/2]}(x) + x\mathbb{I}_{[1,2]}(x))$$

- 1) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que f soit une densité de probabilité ?
 Il faut que $c > 0$ pour que la fonction f soit positive et que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_0^{1/2} dx + \int_1^2 x dx = c^{-1} = 2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}.$$

2) Donnez l'expression de la fonction $F(t) := \mathbb{P}_X(]-\infty, t])$.

Remarquons tout d'abord que les points de discontinuité de F sont en 0, 1 et 2. De plus, le support de la loi continue est $]0, 1/2[\cup]1, 2[$. Si $t < 0$, on a $F(t) = 0$. Si $t \in [0, 1/2[$,

$$F(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \int_0^t dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{t}{2} \right).$$

Si $t \in [1/2, 1[$,

$$F(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{24}.$$

Si $t \in [1, 2[$,

$$F(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{t^2}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{t^2}{4} \right).$$

Enfin, si $t \geq 2$, $F(t) = 1$.

3) Après avoir justifié son existence, calculez l'espérance de X de deux façons différentes.

La variable aléatoire X est positive. De plus, elle prend ses valeurs sur l'ensemble $]0, 1/2[\cup]1, 2[$. Ainsi, $\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(X) \leq 2$.

Première méthode – On a $\mathbb{E}(X) = [\mathbb{E}(X^{(1)}) + \mathbb{E}(X^{(2)})]/2$ où $X^{(1)}$ est une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et $X^{(2)}$, une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X^{(2)}$.

$$\mathbb{E}(X^{(1)}) = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

De plus

$$\mathbb{E}(X^{(2)}) = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} x dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{16} + \frac{7}{6} = \frac{59}{48}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3} + \frac{59}{96} = \frac{123}{96}.$$

Seconde méthode – La variable aléatoire X étant positive, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty (1 - F(t)) dt = \int_0^{1/2} \left(\frac{11}{12} - \frac{t}{4} \right) dt + \frac{19}{48} + \int_1^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{t^2}{8} \right) dt \\ &= \frac{11}{24} + \frac{19}{48} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \int_0^{1/2} t dt - \frac{1}{8} \int_1^2 t^2 dt \\ &= \frac{11}{24} + \frac{19}{48} + \frac{3}{4} - \frac{1}{32} - \frac{7}{24} = \frac{123}{96}. \end{aligned}$$