Corrigé

Statistique des valeurs extrêmes

(1ère Session, année 2020-2021, Semestre 3)

Partie I

1) *Le point terminal de F étant infini, il est impossible que F appartienne au domaine d'attraction de Weibull.*

2) *Soit $t > 0$, on a*

$$\frac{1 - F(tx)}{1 - F(x)} = \exp[(\varphi(x))^\theta - (\varphi(tx))^\theta] = \exp\left[-\ln(t)\frac{(\varphi(tx))^\theta - (\varphi(x))^\theta}{\ln(t)}\right] \to t^{-\xi}.$$

Donc $1 - F$ est à variations régulières d'indice $-\xi$ et donc F appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec pour indice des valeurs extrêmes $\gamma = 1/\xi$.

3) *Il suffit de prendre par exemple la fonction $\varphi(x) = (\ln(x))^{1/\theta}$. La condition est vérifiée avec $\xi = 1$.*

4) *Pour tout $t > 0$,*

$$\frac{1 - F(tx)}{1 - F(x)} = \exp\left[(\varphi(x))^\theta \left(1 - \left(\frac{\varphi(tx)}{\varphi(x)}\right)^\theta\right)\right]$$

Or, si $t \neq 1$

$$1 - \left(\frac{\varphi(tx)}{\varphi(x)}\right)^\theta \to 1 - t^{\theta\beta} \neq 0,$$

et donc, comme $\varphi(x) \to \infty$,

$$\frac{1 - F(tx)}{1 - F(x)} \to \infty.$$

La fonction $1 - F$ n'est donc pas à variations régulières ce qui prouve bien que F n'appartient pas au domaine d'attraction de Fréchet.

5) *Il suffit de choisir a telle que $-1/a(t)$ soit la dérivée de la fonction $\ln(1 - F(t))$. Comme $\ln(1 - F(0)) = \ln(1) = 0$, on aura le résultat attendu. On prend donc*

$$a(t) = \frac{1}{\theta\varphi'(t)(\varphi(t))^{\theta-1}}.$$

6) *Il suffit donc que la fonction a trouvée à la question précédente soit telle que $a'(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Or,*

$$\begin{aligned} a'(t) &= -\frac{1}{\theta} \frac{\varphi''(t)(\varphi(t))^{\theta-1} + (\theta-1)(\varphi'(t))^2(\varphi(t))^{\theta-2}}{(\varphi'(t))^2(\varphi(t))^{2\theta-2}} \\ &= -\frac{1}{\theta(\varphi(t))^\theta} \frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{(\varphi'(t))^2} + \frac{1-\theta}{\theta} \frac{1}{(\varphi(t))^\theta}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$, on a bien que $a'(t) \to 0$ et donc que F appartient au domaine d'attraction de Gumbel.

7) *On a*

$$a(t) = \frac{1}{\theta\beta} t^{1-\beta} t^{\beta-\beta\theta} = \frac{1}{\theta\beta} t^{1-\beta\theta}.$$

Donc,

$$a'(t) = \frac{1-\beta\theta}{\theta\beta} t^{-\beta\theta} \to 0.$$

Pour trouver les suites de normalisation, on remarque que

$$F^n(a_n x + b_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -b_n/a_n \\ (1 - \exp[-(a_n x + b_n)^{\beta\theta}])^n & \text{si } x \geq -b_n/a_n. \end{cases}$$

Pour retrouver le domaine de définition, il faut que $a_n/b_n \to 0$. De plus, si on suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a_n x + b_n \to \infty$, on a

$$\begin{aligned} n \ln[1 - \exp[-(a_n x + b_n)^{\beta\theta}]] &\sim -n \exp[-(a_n x + b_n)^{\beta\theta}] = -n \exp[-b_n^{\beta\theta}(1 + a_n/b_n x)^{\beta\theta}] \\ &= -n \exp[-b_n^{\beta\theta}(1 + \beta\theta a_n/b_n x(1 + O(a_n/b_n)))] \\ &= -n \exp[-b_n^{\beta\theta}] \exp\Big[-\beta\theta a_n b_n^{\beta\theta-1} x(1 + O(a_n/b_n))\Big] \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant a_n et b_n telles que

$$n \exp[-b_n^{\beta\theta}] = 1 \text{ et } \beta\theta a_n b_n^{\beta\theta-1} = 1,$$

c'est-à-dire

$$b_n = (\ln(n))^{1/(\beta\theta)} \text{ et } a_n = \frac{1}{\beta\theta} b_n^{1-\beta\theta} = a(b_n),$$

on a le résultat.

Partie II – Inférence statistique

8) *Remarquons tout d'abord que la fonction φ est bijective d'inverse φ^{-1}. D'après le cours, on sait que φ^{-1} est une fonction à variations régulières d'indice $\theta\xi$. On a de plus que $q(u) = \varphi^{-1}((\ln(1/u))^{1/\theta})$. Pour tout $t > 0$ on a*

$$\frac{q(1/(tx))}{q(1/x)} = \frac{\varphi^{-1}((\ln(tx))^{1/\theta})}{\varphi^{-1}((\ln(x))^{1/\theta})} = \left(\frac{\ln(tx)}{\ln(x)}\right)^\xi \frac{\ell((\ln(tx))^{1/\theta})}{\ell((\ln(x))^{1/\theta})}.$$

Or, $\ln(tx)/\ln(x) \to 1$ *lorsque* $x \to \infty$ *et de plus*

$$\frac{\ell((\ln(tx))^{1/\theta})}{\ell((\ln(x))^{1/\theta})} = \frac{\ell((\ln(x))^{1/\theta}(1+o(1))}{\ell((\ln(x))^{1/\theta})} \to 1,$$

puisque $(\ln(x))^{1/\theta} \to \infty$ *et que pour tout* $0 < a < b < \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \left| \frac{\ell(tx)}{\ell(x)} - 1 \right| = 0.$$

9) *En utilisant les calculs précédents, on a*

$$\frac{q(\exp(-tx))}{q(\exp(-x))} = \frac{\varphi^{-1}((tx)^{1/\theta})}{\varphi^{-1}(x^{1/\theta})} = t^{\xi}\frac{\ell((tx)^{1/\theta})}{\ell(x^{1/\theta})} \to t^{\xi}.$$

10) *On sait d'après la question 9) que pour* x *assez grand et pour tout* $t > 0$,

$$\frac{q(\exp(-tx))}{q(\exp(-x))} \approx t^{\xi}.$$

En prenant $x = \ln(n/k_n) \to \infty$ *et* $t = \ln(n/i)/\ln(n/k_n)$ *pour* $i \in \{1, \ldots, k_n - 1\}$ *on a*

$$\frac{q(i/n)}{q(k_n/n)} \approx \left(\frac{\ln(n/i)}{\ln(n/k_n)}\right)^{\xi},$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, k_n - 1\}$. *En prenant le logarithme,*

$$\ln\frac{q(i/n)}{q(k_n/n)} \approx \xi \ln\frac{\ln(n/i)}{\ln(n/k_n)}.$$

En sommant de chaque côté, on retrouve l'approximation proposée.

11) *La représentation de Rényi nous assure que*

$$U_{k_n+1,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{T_{k_n+1}}{T_{n+1}},$$

où $T_j = E_1 + \ldots + E_j$. *Ainsi, en utilisant la loi forte des grands nombres, comme* $k_n \to \infty$, *on a*

$$\frac{n+1}{k_n+1} U_{k_n+1,n} \stackrel{\text{p.s.}}{\to} 1,$$

et on conclut la réponse en remarquant que $(n+1)/(k_n+1) \sim n/k_n$.

12) *Il suffit de remarquer que*

$$X_{n-k_n,1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} q(U_{k_n+1,n}).$$

On a le résultat en utilisant la question précédente et le fait que q *est une fonction à variations lentes qui conserve donc les équivalents.*

13) *On part de l'égalité en loi*

$$\{X_{n-i,n},\ i=0,\dots,n-1\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{q(U_{i+1,n}),\ i=0,\dots,n-1\}.$$

Comme $q(u)=\ln^{\xi}(1/u)\ell((\ln(1/u))^{1/\theta})$, *on a*

$$\{\ln X_{n-i,n},\ i=0,\dots,n-1\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\xi \ln\ln(U_{i+1,n}^{-1})+\ln\left(\ell([\ln(U_{i+1,n}^{-1})]^{1/\theta})\right),\ i=0,\dots,n-1\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\{\ln X_{n-i,n}-\ln X_{n-k_n,n};\ i=0,\dots,k_n-1\}\\ \stackrel{\mathcal{L}}{=}\ &\left\{\xi\ln\left(\frac{\ln(U_{i+1,n})}{\ln(U_{k_n+1,n})}\right)+\ln\left(\frac{\ell\left([\ln(U_{i+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}{\ell\left([\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}\right);\ i=0,\dots,k_n-1\right\}\end{aligned}$$

On trouve donc bien le résultat attendu en remarquant que $\ln(U_{i+1,n})=\ln(U_{k_n+1,n})+\ln(U_{i+1,n}/U_{k_n+1,n})$.

14) *La fonction quantile d'une loi exponentielle standard est* $\ln(1/\cdot)$ *et donc*

$$\{\ln(U_{i+1,n}^{-1}),\ i=0,\dots,k_n-1\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{E_{n-i,n},\ i=0,\dots,k_n-1\}$$

On en déduit le résultat en remarquant que

$$\frac{\ln(U_{i+1,n}/U_{k_n+1,n})}{\ln(U_{k_n+1,n})}=\frac{\ln(U_{i+1,n}^{-1})-\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})}{\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})}.$$

15) *En utilisant la représentation de Rényi pour des statistiques d'ordre d'une loi exponentielle, on a :*

$$\begin{aligned}&\{E_{n-i,n}-E_{n-k_n,n},\ i=0,\dots,k_n-1\}\\ \stackrel{\mathcal{L}}{=}\ &\left\{\sum_{r=1}^{n-i}\frac{F_r^*}{n-r+1}-\sum_{r=1}^{n-k_n}\frac{F_r^*}{n-r+1},\ i=0,\dots,k_n-1\right\}\\ =\ &\left\{\sum_{r=n-k_n+1}^{n-i}\frac{F_r^*}{n-r+1},\ i=0,\dots,k_n-1\right\}\end{aligned}$$

En posant $s=r-n+k_n$, *on a donc*

$$\{E_{n-i,n}-E_{n-k_n,n},\ i=0,\dots,k_n-1\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left\{\sum_{s=1}^{k_n-i}\frac{F_{s+n-k_n}^*}{k_n-s+1},\ i=0,\dots,k_n-1\right\}$$

En utilisant à nouveau la représentation de Rényi pour des statistiques d'ordre d'une loi exponentielle, on trouve la première partie du résultat. De plus, on a

$$E_{n-k_n,n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{r=1}^{n-k_n}\frac{F_r^*}{n-r+1}.$$

On remarque qu'il n'y a aucune variable F_r^* en commun dans les représentations des $E_{n-i,n}-E_{n-k_n,n}$ pour tout $i=0,\dots,k_n-1$ et la représentation de $E_{n-k_n,n}$. Les variables $\{E_{n-i,n}-E_{n-k_n,n},\ i=0,\dots,k_n-1\}$ sont donc indépendantes de la variable $E_{n-k_n,n}$.

16) *D'après la question 15),*

$$\left\{\frac{E_{n-i,n}-E_{n-k_n,n}}{E_{n-k_n,n}},\ i=0,\dots,k_n-1\right\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \left\{\frac{F_{k_n-i,n}}{E_{n-k_n,n}},\ i=0,\dots,k_n-1\right\},$$

puisque les variables $\{E_{n-i,n}-E_{n-k_n,n},\ i=0,\dots,k_n-1\}$ sont indépendantes de la variable $E_{n-k_n,n}$. On trouve ensuite le résultat attendu en utilisant la question 14).

17) *En utilisant l'expression de la fonction ℓ, on a*

$$\ln\left(\frac{\ell\left([\ln(U_{i+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}{\ell\left([\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}\right) = \int_{[\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta}}^{[\ln(U_{i+1,n}^{-1})]^{1/\theta}} \frac{\Delta(t)}{t}dt.$$

Comme $U_{k_n+1,n} \stackrel{\text{p.s.}}{\to} 1$ d'après la question 11), on a, la fonction $|\Delta|$ étant asymptotiquement décroissante,

$$\left|\sum_{i=1}^{k_n-1}\ln\left(\frac{\ell\left([\ln(U_{i+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}{\ell\left([\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}\right)\right| \le \left|\Delta([\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta})\right| \sum_{i=1}^{k_n-1}\int_{[\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta}}^{[\ln(U_{i+1,n}^{-1})]^{1/\theta}} \frac{1}{t}dt,$$

qui est le résultat attendu (après calcul de l'intégrale).

18) *Posons*

$$A_{i,n} := \ln\left(1+\frac{\ln(U_{i+1,n}/U_{k_n+1,n})}{\ln(U_{k_n+1,n})}\right)$$

et

$$R_{i,n} = \ln\left(\frac{\ell\left([\ln(U_{i+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}{\ell\left([\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta}\right)}\right).$$

En utilisant la question 13) on a

$$\hat{\xi}_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} \xi\sum_{i=0}^{k_n-1}A_{i,n}\Bigg/\sum_{i=1}^{k_n-1}\ln\left(\frac{\ln(n/i)}{\ln(n/k_n)}\right) + \sum_{i=0}^{k_n-1}R_{i,n}\Bigg/\sum_{i=1}^{k_n-1}\ln\left(\frac{\ln(n/i)}{\ln(n/k_n)}\right).$$

D'après la question 16),

$$\sum_{i=0}^{k_n-1}A_{i,n}\Bigg/\sum_{i=1}^{k_n-1}\ln\left(\frac{\ln(n/i)}{\ln(n/k_n)}\right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^{k_n}\ln\left(1+\frac{F_i}{E_{n-k_n,n}}\right)\Bigg/\sum_{i=1}^{k_n-1}\ln\left(\frac{\ln(n/i)}{\ln(n/k_n)}\right)$$

qui converge en probabilité vers 1 (résultat admis dans la question 18)). Comme $|\Delta|$ *est une fonction à variations régulières et que, d'après la question 11),* $U_{k_n+1,n}^{-1} \overset{\text{p.s.}}{\to} n/k_n \to \infty$, *on sait que*

$$\left|\Delta([\ln(U_{k_n+1,n}^{-1})]^{1/\theta})\right| \sim |\Delta([\ln(n/k_n)]^{1/\theta})| \to 0.$$

On termine la démonstration en utilisant la majoration de la question 17) pour obtenir

$$\sum_{i=0}^{k_n-1} R_{i,n} \Bigg/ \sum_{i=1}^{k_n-1} \ln\left(\frac{\ln(n/i)}{\ln(n/k_n)}\right) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}\left(|\Delta([\ln(n/k_n)]^{1/\theta})|\right).$$