Contrôle continu de traitement du signal

Exercice 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de réels définie par $\begin{cases} u_{2k} = \dfrac{2}{k} \\ u_{2k+1} = \dfrac{1}{k+1} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $u_{2k} > u_{2k+1}$ et $u_{2k-1} > u_{2k}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle décroissante à partir d'un certain rang ?

2. Déterminer un réel $a > 0$ (indépendant de n) tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq \dfrac{a}{n}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : *toute suite de réels positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang* ?

Exercice 2.

Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\cos^2\left(\frac{1}{n^{4/5}}\right)\right)$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{n^{1/2}\ln n}}\right)$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{2^{3n}\,(n!)^3}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{4^{3n}\,(n!)^3}$

Exercice 3.

1. Soit (f_n) la suite de fonctions définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{n} & \text{si } x \in [-n, n] \\ n & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle mais pas uniformément.

2. Soit (f_n) la suite de fonctions définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+n} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (u_n).

3. Soit (f_n) la suite de fonctions définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2}{nx+1} & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (u_n).

Exercice 4.
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+x)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

Exercice 5.
1. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[0, \pi[$ par $f(x) = 1$ et sur $[\pi, 2\pi[$ par $f(x) = 0$.
a) Tracer la représentation graphique de f.
b) Calculer $S(f)$ la série de Fourier de f sous forme complexe.
c) Etudier la convergence de la série de Fourier et en déduire sa valeur en cas de convergence.
2. Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = |x|$.
a) Tracer la représentation graphique de f.
b) Calculer $S(f)$ la série de Fourier de f sous forme trigonométrique.
c) Etudier la convergence de la série de Fourier et en déduire sa valeur en cas de convergence.
d) Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$?