# TD 2 : Séries numériques

**Exercice 1.**

**1.** Montrer que toute suite croissante converge si et seulement si elle est majorée.

**2.** Montrer qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes réels positifs converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles définie pour tout $n \geq 0$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.

**Exercice 2.**

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites de réels strictement positifs.

**1.** On suppose que pour $n$ assez grand $u_n \leq v_n$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

**2.** On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ (on écrit alors $u_n \prec\prec_{n\to\infty} v_n$). Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

**3.** On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ (on écrit alors $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$). Montrer que les séries $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ont même nature. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum_{k=n}^{\infty} u_n \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_n$. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on a $\sum_{k=0}^{n} u_n \sim \sum_{k=0}^{n} v_n$.

**4.** On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Montrer que $\sum u_n$ converge si $l < 1$ et diverge si $l > 1$. Que peut-on dire si $l = 1$ ?

**Exercice 3.**

Donner la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ ; b) $\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/2}+7}$ ; c) $\sum \frac{\cos(2n)}{n^3+(-1)^n}$ ; d) $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ ; e) $\sum \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ ; f) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ ;
g) $\sum \ln\left(1+\frac{n^2-\sqrt{n}+1}{n^2+\sqrt{n}+1}\right)$ ; h) $\sum \ln\left(1+\frac{n^2-\sqrt{n}+1}{n^3+\ln n+3}\right)$ ; i) $\sum \frac{n!}{n^n}$ ; j) $\sum \frac{n^2}{2^n+n}$ ; k) $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

**Exercice 4.**

Soit $(un)$ la suite réelle définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

**1.** Montrer que $\sum u_n$ converge.

**2.** On note $(S_n)_{n\geq 2}$ la suite des sommes partielles définie pour tout $n \geq 2$ par $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$. Montrer que $S_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(2)$ et en déduire la valeur de $\sum u_n$.

**Exercice 5.**
Soit $f$ une fonction décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

**1.** Définissons $u_n = S_n - I_n$ où $S_n = \displaystyle\sum_{n=0}^{n} f(k)$ et où $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)dx$. Montrer que la suite $(u_n)$ converge et montrer que les suites $(S_n)$ et $(I_n)$ sont de même nature.

**2.** Montrer que si $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ alors

$\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} f(k) \sim \int_n^{\infty} f(x)dx.$

**3.** Montrer que si $f$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ alors

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^{n} f(x)dx.$

**4.** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où $\gamma$ est une constante (appelée constante d'Euler) vérifiant $\gamma \in [0,1]$ et où $(\varepsilon_n)$ est une suite de réels qui tend vers 0.

**5.** Quelle est la nature de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

**6.** Montrer que si $0 < \alpha < 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

**7.** Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

**Exercice 6.**

**1.** Quelle est la nature des séries $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{1/2}\ln(n)}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ ?

**2.** Plus généralement, montrer que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge pour tout $\beta$ dans $\mathbb{R}$ si $\alpha > 1$ et diverge pour tout $\beta$ dans $\mathbb{R}$ si $\alpha < 1$.

**3.** Montrer que $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

**Exercice 7.**

**1.** Soit $(u_n)$ une suite réelle décroissante qui tend vers 0. Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ est une série convergente : on pourra introduire $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ et montrer que les suites $S_{2n}$ et $S_{2n+1}$ sont des suites adjacentes.

**2.** Donner la nature des séries suivantes : a) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ; b) $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ; c) $\displaystyle\sum (-1)^n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

**Exercice 8.**
Soit $(v_n)$ une suite de réels positifs telle que $\sum v_n$ diverge. Soit $(u_n)$ une suite de réels tendant vers une limite $l$. Montrer que

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k v_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \xrightarrow{n\to\infty} l.$$