TD 5 : Transformée de Fourier

Exercice 1.

1. Soit H la fonction “porte” définie par

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer $\widehat{H}$ la transformée de Fourier de H. Tracer H et $\widehat{H}$.

2. Soit H_T la fonction “impulsion” définie pour $T > 0$ par

$$H_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer (directement) $\widehat{H_T}$ la transformée de Fourier de H_T.

b) Exprimer H_T en fonction de H et retrouver $\widehat{H_T}$.

c) Que se passe-t-il lorsque T tend vers 0 ?

3. Soit Λ la fonction “triangle” définie par

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } t \in [-1; 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer (directement) $\widehat{\Lambda}$ la transformée de Fourier de Λ.

b) Déterminer Λ' puis l'exprimer en fonction de H et en déduire $\widehat{(\Lambda')}$. Retrouver alors $\widehat{\Lambda}$.

c) Vérifier que $\Lambda = H * H$ puis retrouver $\widehat{\Lambda}$.

Exercice 2.

1. Considérons pour $a > 0$ la fonction $f_a : t \to e^{-a|t|}$. Déterminer $\widehat{f_a}$ la transformée de Fourier de f_a.

2. En déduire la transformée de Fourier des fonctions $g : t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ et $h : t \to \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$.

3. En déduire la valeur des intégrales $A(\xi) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos \xi t}{1+t^2} dt$ et $B(\xi) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t \sin \xi t}{(1+t^2)^2} dt$.

Exercice 3.

1. Soit la fonction $g : x \to e^{-x^2}$.

a) Vérifier que $g'(x) = -2xg(x)$.

b) En appliquant la transformation de Fourier à l'égalité ci-dessus, montrer que $\widehat{g}$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

c) En déduire la valeur de $\widehat{g}$. (on rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$)

2. Trouver les fonctions f de carré intégrable telles que
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(x-u)du = e^{-x^2}.$$

Exercice 4.

1. Soit la fonction $f : t \to \begin{cases} e^t & \text{si } t \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Déterminer la transformée de Fourier de f.

2. Soit l'équation différentielle $(E) : y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t)$.
Déterminer les solutions de (E) telles que y, y' et y'' sont intégrables.
(utiliser la question 2. de l'exercice 2.)