Université de Nantes
L3 - Module S32M130
Année 2008/2009

Ségolen Geffray
segolen.geffray@univ-nantes.fr

TD 2 : Les chaines de Markov homogènes

Exercice 1.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaine de Markov homogène à espace d'états $E=\{0,1\}$ de matrice de transition $\mathcal{P}=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$ pour $0<\alpha,\beta<1$.
1. Calculer $\mathbb{P}[X_1=0|X_0=0,X_2=0]$ et $\mathbb{P}[X_1\neq X_2]$ en fonction de α, β et de la loi initiale de la chaine.
2. Tracer le graphe des états associé à $\mathcal{P}$ et déterminer la nature des différents états.
3. Déterminer la matrice de transition en n pas, notée $\mathcal{P}^{(n)}$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}^{(n)}$.
4. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire notée π puis déterminer son expression.
5. On suppose désormais que la loi initiale est π. Déterminer $\mathbb{E}[X_n]$, $\mathrm{Var}(X_n)$ puis $\mathrm{Cov}(X_n,X_{n+1})$. Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes pour $n=0,1,...$?
6. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}(S_n)$. En déduire que (S_n/n) converge en probabilité lorsque n tend vers ∞.

Exercice 2.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaine de Markov homogène à espace d'états $E=\{1,2,3,4\}$ de matrice de transition $\mathcal{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1/2&0&1/4&1/4\\1/2&1/2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$.
1. Tracer le graphe des états associé à $\mathcal{P}$ et déterminer la nature des différents états.
2. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire notée π puis déterminer son expression.
3. Déterminer les limites presque-sûres de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k$ et de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}X_k^2$.

Exercice 3.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaine de Markov homogène à espace d'états $E=\{1,2,...,10\}$ de matrice de transition
$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2&0&0&0&0&0&0&0\\0&1/3&0&0&0&0&2/3&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1/3&1/3&0&0&0&1/3&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1/4&0&3/4&0\\0&0&1/4&1/4&0&0&0&1/4&0&1/4\\0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1/3&0&0&1/3&0&0&0&0&1/3\end{pmatrix}.$$
1. Tracer le graphe des états associé à $\mathcal{P}$ et déterminer la nature des différents états.
2. Montrer qu'il existe une infinité de lois invariantes.

Exercice 4.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaine de Markov homogène à espace d'états $E = \{1,2,3\}$ de matrice de transition $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1. Tracer le graphe des états associé à $\mathcal{P}$ et déterminer la nature des différents états.

2. Montrer qu'il existe une unique loi stationnaire notée π puis déterminer son expression.

3. Déterminer $p^n_{1,1}$ et calculer sa limite lorsque n tend vers ∞. En déduire que la chaine est apériodique puis déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}_{i,j}$ pour tous états i et j de E.

Exercice 5.
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaine de Markov homogène à espace d'états $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ de matrice de transition $\mathcal{P}$ dont les termes hors-diagonaux sont donnés par : $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} . & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & . \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les termes diagonaux de $\mathcal{P}$.

2. Tracer le graphe des états associé à $\mathcal{P}$ et déterminer la nature des différents états.

3. On pose $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{1,2\}\}$ et, pour i dans E, on pose $\rho_i = \mathbb{P}[T < \infty | X_0 = i]$. Déterminer la valeur de ρ_i pour $i = 1,2,3,5$ et, pour $i = 4,6$, montrer que $0 < \rho_i < 1$.

4. Pour $i = 4,6$, établir la formule $\rho_i = \sum\limits_{j\in E} p_{i,j}\rho_j$. En déduire la valeur de ρ_4 et ρ_6.

5. On pose $T' = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{3,5\}\}$. Déduire de ce qui précède $\mathbb{P}[T' < \infty | X_0 = 4]$ et $\mathbb{P}[T' < \infty | X_0 = 6]$.

6. Montrer que la chaine admet une infinité de lois invariantes.

7. Déterminer la fréquence limite du nombre de passages dans l'état 1.