Université de Strasbourg — Ségolen Geffray
M1 - Enseignement CAPES — geffray@math.unistra.fr
Probabilité et statistique pour le CAPES — Année 2013/2014

TD 1: analyse combinatoire et éléments de la théorie des probabilités

Exercice 1.
Univers finis.

1. Soit l'expérience "une personne lance un dé cubique à 6 faces et note la valeur obtenue sur la face supérieure de ce dé". Quel est l'univers associé à cette expérience? Quels sont les évènements élémentaires?

2. Soit l'expérience "une personne lance simultanément deux dés cubiques à 6 faces et note la valeur obtenue sur la face supérieure de chaque dé". Quel est l'univers associé à cette expérience? Quels sont les évènements élémentaires?

3. Soit l'expérience "une personne lance simultanément deux dés cubiques à 6 faces et note la somme des valeurs obtenues sur la face supérieure de chaque dé". Quel est l'univers associé à cette expérience? Quels sont les évènements élémentaires?

4. Soit l'expérience "Alex compte le nombre de véhicules se présentant au péage de l'autoroute en une journée". Quel est l'univers associé à cette expérience?

5. Soit l'expérience "Mr Martin note, comme chaque midi, la température extérieure". Mr Martin habite à Paris où la température à 12h peut varier de -10˚C à 43˚C. Quel est l'univers associé à cette expérience?

6. Soit l'expérience "Mr Jean note, comme chaque lundi, la durée de son vol Paris-Berlin". Le vol entre Paris et Berlin dure 1h45, peut avoir jusqu'à 15 minutes d'avance si le vent est favorable et jusqu'à 3h de retard en cas de problème. Quel est l'univers associé à cette expérience?

7. Soit l'expérience "le technicien mesure et pèse une tige tirée de la production". La tige est usinée de sorte qu'elle pèse entre 12g et 25g et mesure entre 8.5cm et 11.5cm. Quel est l'univers associé à cette expérience?

Exercice 2.
Evènements.
Soit l'expérience "une personne lance un dé cubique à 6 faces et note la valeur obtenue sur la face supérieure de ce dé".

1. Comment décrire l'évènement A="obtenir une valeur inférieure à 4"?

2. Comment décrire l'évènement B="obtenir une valeur paire"?

3. Comment décrire l'évènement C="obtenir une valeur inférieure à 4 ou une valeur paire"?

4. Comment décrire l'évènement D="obtenir une valeur paire inférieure à 4"?

5. Comment décrire l'évènement E="obtenir une valeur supérieure ou égale à 8"?

6. Comment décrire l'évènement F="obtenir une valeur inférieure ou égale à 6"?

Exercice 3.
Evènements (suite).
Soit l'expérience "une personne lance simultanément deux dés cubiques à 6 faces et note la valeur obtenue sur la face supérieure de chaque dé".

1. Comment décrire l'évènement A="obtenir au moins un 6"?

2. Comment décrire l'évènement B="obtenir une somme des deux valeurs supérieures ou égales à 10"?

3. Comment décrire l'évènement C="obtenir au moins un 6 et obtenir une somme des deux valeurs qui soit supérieure ou égale à 10"?

4. Comment décrire l'évènement D="obtenir un produit des deux valeurs supérieur à 100"?

Exercice 4.
Exemple d'équiprobabilité sur un univers fini.
Soit l'expérience "une personne lance un dé cubique à 6 faces et note la valeur obtenue sur la face supérieure de ce dé". Soit, pour $i = 1, 2, ..., 6$, l'évènement ω_i="obtenir la valeur i". Effectuer l'hypothèse d'équiprobabilité revient à supposer que $\mathbb{P}[\omega_i] = 1/6$ pour $i = 1, 2, ..., 6$, ce qui correspond au cas où le dé est bien équilibré.

- Considérons l'évènement B="obtenir une valeur paire". Que vaut $\mathbb{P}[B]$?

- Considérons C="obtenir une valeur inférieure à 4 ou une valeur paire". Que vaut $\mathbb{P}[C]$?

Attention, ceci ne tient pas si le dé est truqué de sorte que $\mathbb{P}[\omega_1] = 1/24$, $\mathbb{P}[\omega_i] = 1/6$ pour $i = 2, ..., 5$ et $\mathbb{P}[\omega_6] = 7/24$.

- Que valent $\mathbb{P}[B]$ et $\mathbb{P}[C]$ dans ce cas?

Exercice 5.
Tubes d'aluminium.
Un échantillon de 100 tubes d'aluminium est prélevé dans la production de l'usine et chaque tube est classé en fonction de sa longueur (L) et de sa qualité de surface (QS). Chacune de ces caractéristiques peut être considérée comme "conforme" ou non "conforme". Les résultats suivants sont obtenus:

	L conforme	L non-conforme
QS conforme	75	7
QS non-conforme	10	8

Soit A l'évènement "le tube a une qualité de surface conforme" et soit B l'évènement "le tube est de longueur conforme".

- Déterminer les probabilités suivantes: $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(\overline{A} \cup B)$, $\mathbb{P}(A|B)$ et $\mathbb{P}(B|A)$.

Exercice 6.
Chasse au canard.
Trois amis vont à la chasse. Le premier est bon tireur et a la probabilité 2/3 d'atteindre sa cible. Les deux autres sont moins performants et ont la probabilité 1/6 d'atteindre leur cible. Un canard s'envole: les trois amis tirent dessus.

- Quelles sont les chances de survie du canard?

Exercice 7.
Grippe et symptômes.
Durant l'hiver, la probabilité pour qu'une personne ait la grippe est estimée à 30%. Le diagnostique clinique est posé lorsque la personne présente les symptômes suivants : courbatures, fièvre subite, signes respiratoires. Durant l'hiver, la probabilité pour qu'une personne présente ces symptômes est estimée à 40%. On sait aussi qu'une personne ayant la grippe a 80 chances sur 100 d'avoir ces symptômes.

- Quelle est la probabilité d'avoir la grippe et de présenter les symptômes décrits ci-dessus?
- Quelle est la probabilité d'avoir la grippe sachant qu'on présente les symptômes ci-dessus?

Exercice 8.
Tirage de 2 pièces parmi une production.
L'ingénieur d'usine de l'entreprise Product a noté, en se basant sur une évaluation de plusieurs années, que 2% de la production de l'usine est défectueuse. L'ingénieur tire successivement deux pièces dans la production. On suppose que le fait d'observer une pièce défectueuse n'influe pas sur la qualité de l'autre pièce.

1. Quelle est la probabilité que les 2 pièces tirées par l'ingénieur soient défectueuses?
2. Quelle est la probabilité que l'une des deux pièces soit bonne et l'autre défectueuse?

Exercice 9.
Bris d'un dispositif électronique et arrêt d'une chaine d'empaquatage.
L'ingénieur d'usine de l'entreprise Electropak a noté, en se basant sur une évaluation de plusieurs années, qu'un dispositif électronique installé sur une chaine d'empaquetage a une probabilité de 20% de tomber en panne. Lorsque ce dispositif tombe en panne, la probabilité d'être obligé d'arrêter complètement la chaine d'empaquetage (à cause d'un bris trop important) est de 50%.

- Quelle est la probabilité d'observer que le dispositif tombe en panne et que la chaine d'empaquetage soit complètement arrêtée?

Exercice 10.
Kermesse.
Pour une kermesse d'école, un stand propose le jeu suivant. Le joueur tire une carte dans un jeu comportant 32 cartes. S'il obtient une figure (i.e. un valet, une dame ou un roi), il tire un billet dans la corbeille "Super Chance" qui contient 20 billets gagnants et 30 billets perdants. Si le joueur n'obtient pas de figure, il tire un billet dans la corbeille "Petite Chance" qui contient 10 billets gagnants et 40 billets perdants.

- Quelle est la probabilité pour un joueur de tirer un billet gagnant?

Exercice 11.
Orthographe anglophone.
Les anglais et les américans orthographient le mot "rigueur" respectivement "rigour" et "rigor". Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Une lettre est prise au hasard dans ce mot et c'est une voyelle. Or, 40% des anglophones de l'hôtel sont des Anglais et 60% des américains.

- Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais?

Exercice 12.
Alcootest.
Une entreprise commercialisant un alcootest décide d'en vérifier la fiabilité. Les chiffres sont les suivants:

- 25% des personnes contrôlées par la police sont effectivement en état d'ébriété
- 95 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne était réellement en état d'ébriété
- 1 fois sur 100, l'alcootest s'est révélé positif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété

1. Quelle est la probabilité que l'alcootest donne une indication correcte?
2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement en état d'ébriété lorsque l'alcootest est positif?

Exercice 13.
Tirage de boules.
Une urne étiquetée A contient 3 boules blanches, 2 boules noires et 5 boules rouges. Une urne étiquetée B contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges. On effectue l'hypothèse d'équiprobabilité à la fois en ce qui concerne le tirage des urnes et le tirage des boules.

1. On tire une boule au hasard dans une des urnes elle-même tirée au hasard. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge?
2. On tire une boule au hasard dans une des urnes elle-même tirée au hasard. La boule tirée étant rouge, quelle est la probabilité que celle-ci provienne de l'urne A?

Exercice 14.
Puces électroniques contaminées.
Lors d'un procédé de fabrication de semi-conducteurs, les puces qui ont été soumises à une contamination due à la présence de poussières tombent en panne avec une probabilité 0.1 tandis que les puces qui n'ont pas été soumises à une contamination tombent en panne avec une probabilité 0.005. Pendant une séquence particulière de production, la probabilité que les puces soient soumises à une contamination est 0.2.

1. Calculer la probabilité qu'une de ces puces tombent en panne.
2. Sachant qu'une puce est tombée en panne, calculer la probabilité que celle-ci ait été contaminée lors de la production.

Exercice 15.

Microprocesseurs défectueux.

On suppose que trois types de microprocesseurs utilisés dans la fabrication d'ordinateurs se partagent le marché à raison de 25% pour le type X, 35% pour le type Y et 40% pour le type Z. Les pourcentages de défauts de fabrication sont: 5% pour les microprocesseurs de type X, 4% pour ceux de type Y et 2% pour ceux de type Z. Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour les types X, Y et Z, on prélève un microprocesseur.

1. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux?
2. Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit de type X?