Université de Strasbourg
M1 - Mathématiques fondamentales + Magistère
Statistique

Ségolen Geffray
geffray@math.unistra.fr
Année 2020/2021

Feuille d'exercices

Exercice 1.
Considérons le modèle $(P_\lambda)_{\lambda>0}$ défini pour $\lambda > 0$ par

$$P_\lambda(]-\infty;0]) = 0\,,$$
$$P_\lambda(]0;x]) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x > 0\,.$$

Donner le support de la loi de X et l'espace naturel des paramètres noté Θ. S'agit-il d'un modèle dominé? Si oui, exhiber une mesure dominante et déterminer la dérivée de Radon-Nikodym.

Exercice 2.
Considérons le modèle $(P_p)_{0<p<1}$ défini pour $0 < p < 1$ par

$$P_p(\{0\}) = (1-p)^2\,,$$
$$P_p(\{1\}) = 2p(1-p)\,,$$
$$P_p(\{2\}) = p^2\,.$$

Donner le support de la loi de X et l'espace naturel des paramètres noté Θ. S'agit-il d'un modèle dominé? Si oui, exhiber une mesure dominante et déterminer la dérivée de Radon-Nikodym.

Exercice 3.
Lorsque le modèle pour la variable aléatoire X est paramétré par θ, on note P_θ la loi de X et F_θ la fonction de répartition de X. Pour chacun des modèles suivants, donner le support de la loi de X et l'espace naturel des paramètres noté Θ. Déterminer si le modèle est dominé (auquel cas exhiber une mesure dominante et donner la dérivée de Radon-Nikodym).

1. $P_p = p\delta_0 + (1-p)\delta_1$ pour $0 < p < 1$ où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 et δ_1 est la mesure de Dirac en 1;

2. P_θ est la loi de $X = (Y-\theta)I(Y > \theta)$ où Y suit la loi normale centrée réduite et où $\theta \in \mathbb{R}$.

3. $F_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < a \\ \dfrac{(a-1)x - a}{a-2} & \text{si } a \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ avec $1,5 \le a < 2$;

4. $F_\theta(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $(\theta > 0)$;

5. $F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2}(1 - e^{-\theta x}) & \text{si } 0 \leq x < 1/\theta \\ 1 - \dfrac{1}{2}e^{-\theta x} & \text{si } 1/\theta \leq x \end{cases} \qquad (\theta > 0).$

On admettra le résultat suivant:
Le modèle de Dirac $(\delta_\theta)_{\theta\in\Theta}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est dominé ssi Θ est dénombrable.

Exercice 4.
On s'intéresse à la variable de Bernoulli qui représente la capacité qu'a un travailleur salarié de rembourser ou non son emprunt. On suppose que cette capacité s'écrit sous la forme

$$X = I(Z > 1000)$$

où Z désigne la variable aléatoire qui représente le revenu mensuel une fois que l'on en a déduit les charges. On suppose de plus que Z suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ inconnus. Définir le modèle statistique pour l'observation de X. Ce modèle est-il identifiable?

Exercice 5.
Un laboratoire pharmaceutique met en place la production d'un nouveau médicament sous forme de comprimé. Il faut déterminer le dosage du principe actif dans chaque comprimé. Pour cela, plusieurs techniques industrielles sont envisageables. Toutes fournissent un dosage en principe actif (exprimé en μg) qui suit une loi gaussienne de paramètres notés $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Si la teneur en principe actif est trop importante, le médicament peut devenir dangereux. Le laboratoire considère ainsi que le dosage doit être inférieur à $60\mu g$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.999. Inversement, si la teneur en principe actif est trop faible, le médicament n'est pas efficace. Le laboratoire considère ainsi que le dosage doit être supérieur à $40\mu g$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95.

1. Que représentent ici les paramètres μ et σ?
2. Traduire les exigences du laboratoire concernant la sécurité et l'efficacité des comprimés.
3. En déduire un système de deux inégalités pour μ et σ.
4. A quel intervalle, dépendant de σ doit alors appartenir μ? En déduire la valeur maximale possible pour le choix de σ notée $\sigma_{\max}$.
5. Plus une technique industrielle de dosage est précise, plus elle est chère à mettre en oeuvre. Pour minimiser les coûts de production, le laboratoire a intérêt à choisir une technique industrielle associée au σ le plus grand possible tout en respectant les exigences de sécurité et d'efficacité. Supposons que le laboratoire choisit une technique industrielle associée à $\sigma_{\max}$. Quelle valeur du dosage moyen devra-t-il choisir pour respecter les exigences? On note μ_{opt} cette valeur.
6. La direction du laboratoire pharmaceutique affirme donc calibrer son procédé industriel de dosage sur μ_{opt} et $\sigma_{\max}$. L'ingénieur d'usine décide un contrôle qualité. Il teste la teneur en principe actif de 40 comprimés. Il obtient une moyenne empirique de $45\mu g$ et un écart-type empirique de $5\mu g$. Que peut-il conclure de ces observations au sujet de la teneur moyenne en principe actif?

Exercice 6.
Un laboratoire indépendant est chargé par l'Office de protection des consommateurs de vérifier la résistance à l'éclatement (en kg/cm^2) d'un réservoir de carburant d'un certain fabricant.

1. Des essais sont effectués sur un échantillon de 100 réservoirs conduisant à une résistance moyenne à l'éclatement de 219 kg/cm^2 avec un écart-type empirique de 10kg/cm^2. Proposer un intervalle de confiance pour la résistance moyenne à l'éclatement de ce type de réservoir avec un niveau de confiance de 95%.

2. Proposer un test bilatéral au niveau de risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce de 5% de l'hypothèse nulle selon laquelle la résistance moyenne à l'éclatement est égale à 210 kg/cm^2.

3. On suppose dorénavant que la résistance à l'éclatement est distribuée selon une loi normale. Des essais sont effectués sur un échantillon de 10 réservoirs conduisant à une résistance moyenne à l'éclatement de 219 kg/cm^2 avec un écart-type empirique de 10kg/cm^2. Proposer un intervalle de confiance pour la résistance moyenne à l'éclatement de ce type de réservoir avec un niveau de confiance de 95%.

4. Proposer un test bilatéral au niveau de risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce de 5% de l'hypothèse nulle selon laquelle la résistance moyenne à l'éclatement est égale à 210 kg/cm^2.

Exercice 7.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon i.i.d. distribué comme une variable aléatoire X de loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour un $m \in \mathbb{R}$ et un $\sigma^2 > 0$.

1. Déterminer $\widehat{\theta}_n = (\widehat{m}_n, \widehat{\sigma}_n^2)^t$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta = (m, \sigma^2)^t$.

2. L'estimateur $\widehat{\theta}_n$ est-il biaisé pour θ? asymptotiquement biaisé?

3. Quelle est la loi de $\left(\widehat{m}_n, n\dfrac{\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}\right)^t$?

4. En utilisant la loi de $n\widehat{\sigma}_n^2/\sigma^2$, construire un intervalle de confiance bilatéral pour σ^2 au niveau de confiance $(1-\alpha)$.

Exercice 8.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$ pour un $p \in]0, 1[$.

1. Le modèle $(\mathcal{B}(p))_{p\in]0,1[}$ est-il dominé?

2. Proposer un estimateur de p. Justifier.

3. Etablir son comportement asymptotique.

4. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique bilatéral symétrique pour p au niveau de confiance $(1-\alpha)$.

5. Déterminer un intervalle de confiance à distance finie bilatéral symétrique pour p au niveau de confiance $(1-\alpha)$ en utilisant l'inégalité de Chebyshev.

6. Soit une valeur $0 < p_0 < 1$ fixée connue. Tester l'hypothèse nulle H_0: $p = p_0$ contre l'hypothèse alternative H_1: $\lambda \neq p_0$ au niveau de risque de 1$^{\text{ère}}$ espèce α. Détailler la mise en oeuvre.

Exercice 9.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon i.i.d. de même loi qu' une variable X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$. Considérons le cas où X_i représente le nombre d'évènements indésirables sévères (EIS) dus à l'absorption d'un médicament l'année i, pour $i = 1, ..., n$.

1. Déterminer l'estimateur de la méthode des moments de λ noté $\widetilde{\lambda}_n$ ainsi que l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ noté $\widehat{\lambda}_n$ et étudier leurs propriétés.

2. Déterminer un intervalle de confiance bilatéral asymptotique pour le nombre moyen d'EIS par an au niveau de confiance $(1 - \alpha)$.

3. Déterminer un intervalle de confiance bilatéral à distance finie pour le nombre moyen d'EIS par an au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ en utilisant l'inégalité de Tchebychev.

4. Tester l'hypothèse nulle H_0: $\lambda = 1$ contre H_1: $\lambda \neq 1$ au niveau de risque de $1^{\text{ère}}$ espèce α. Détailler la mise en oeuvre.

Exercice 10.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de v.a.i.i.d. toutes distribuées comme une variable X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda > 0$. On souhaite estimer $\theta = \mathbb{P}(X = 0)$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ noté $\widehat{\theta}_n$.

2. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est biaisé à distance finie.

3. Etablir le comportement asymptotique de $\widehat{\theta}_n$.

4. Déterminer un intervalle de confiance bilatéral asymptotique pour θ au niveau de confiance $(1 - \alpha)$.

Exercice 11.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon i.i.d. de variable parente X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On souhaite estimer le paramètre $\theta = \mathbb{P}(X \leq t_0)$ où $t_0 > 0$ est fixé et connu.

1. Déterminer l'estimateur de θ par la méthode des moments et étudier ses propriétés.

2. Déterminer l'estimateur de λ par la méthode du maximum de vraisemblance et étudier ses propriétés.

3. Déduire de la question précédente l'estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance et étudier ses propriétés.

4. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique bilatéral symétrique de niveau $(1-\alpha)$ pour θ.

Exercice 12.
Un système électrique comporte deux diodes montées en série de sorte que le système est en panne lorsque l'une ou l'autre des diodes cesse de fonctionner. La première diode est de type A

et on suppose que sa durée de fonctionnement suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_A > 0$. La deuxième diode est de type B et on suppose que sa durée de fonctionnement suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_B > 0$. On suppose enfin que les deux durées de fonctionnement sont indépendantes. On met n systèmes au banc d'essai. Lorsqu'un système tombe en panne, on observe sa durée de fonctionnement modélisée par une variable aléatoire notée Y ainsi que la cause de la panne modélisée par une variable aléatoire notée D.

1. Exprimer Y et D en fonction de la durée de fonctionnement des diodes de type respectif A et B.
2. Montrer que Y et D sont indépendantes.
3. Préciser le modèle statistique pour (Y, D). Est-il dominé?
4. Donner la fonction de vraisemblance d'un échantillon i.i.d. de taille n.
5. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta = (\lambda_A, \lambda_B)^t$ noté $\widehat{\theta}_n$.
6. Etudier le comportement asymptotique de $\widehat{\theta}_n$.

Exercice 13.
On observe $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, \theta\}$ pour $\theta \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ noté $\widehat{\theta}_n$.
2. Montrer que $\widehat{\theta}_n = \theta$ à partir d'un certain rang presque-sûrement pour tout $\theta > 0$.

Exercice 14.
On observe $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de loi uniforme sur $[0; \theta]$ pour $\theta > 0$.

1. Le modèle est-il dominé?
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ noté $\widehat{\theta}_n$.
3. Déterminer l'estimateur de la méthode des moments de θ noté $\widetilde{\theta}_n$.
4. Calculer le biais et le risque quadratique de $\widehat{\theta}_n$ et de $\widetilde{\theta}_n$.
5. Déterminer le comportement asymptotique des différents estimateurs.
6. Quel(s) estimateur(s) préférez-vous?
7. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique bilatéral symétrique de niveau $(1-\alpha)$ pour θ en utilisant chacun des estimateurs précédents.
8. Déterminer un intervalle de confiance à distance finie bilatéral symétrique de niveau $(1-\alpha)$ pour θ en utilisant l'inégalité de Tchebychev.

Exercice 15.
On souhaite estimer le ratio de la durée de vie moyenne des fumeurs par rapport à la durée de vie moyenne des non-fumeurs:

$$\theta := \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$$

en notant X la variable aléatoire représentant la durée de vie des fumeurs et Y la variable aléatoire représentant la durée de vie des non-fumeurs.
Soit $(X_1, ..., X_{n_1})$ un échantillon i.i.d. distribué comme X et soit $(Y_1, ..., Y_{n_2})$ un échantillon i.i.d. distribué comme Y, indépendant de $(X_1, ..., X_{n_1})$.

1. Proposer un estimateur de $\mathbb{E}[X]$ et un estimateur de $\mathbb{E}[Y]$. En déduire un estimateur $\widehat{\theta}_{n_1,n_2} = T(X_1, ..., X_{n_1}, Y_1, ..., Y_{n_2})$ de θ. Montrer sa consistance forte lorsque $n_1 = n_2 = n$.
2. Déterminer la loi asymptotique de $\widehat{\theta}_{n_1,n_2}$ lorsque $n_1 = n_2 = n$.
3. En déduire la construction d'un intervalle de confiance bilatéral symétrique asymptotique pour θ de niveau de confiance $(1 - \alpha)$ lorsque $n_1 = n_2 = n$.

Exercice 16.
Soit $(X_1, ..., X_{n_1})$ un échantillon de variables i.i.d. distribuées comme une variable X de variance notée σ_1^2. Soit $(Y_1, ..., Y_{n_2})$ un échantillon de variables i.i.d. distribuées comme une variable Y également de variance σ_2^2. On suppose que ces deux échantillons sont indépendants (donc que X et Y le sont également). On souhaite tester au niveau de risque de $1^{\text{ère}}$ espèce α l'hypothèse nulle H_0: $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ contre l'hypothèse alternative H_1: $\mathbb{E}[X] \neq \mathbb{E}[Y]$.

1. On suppose ici que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Construire un test dans le cas où $n_1 = 100$ et $n_2 = 110$.
2. On suppose ici que X et Y sont des variables gaussiennes. Construire un test dans le cas où $n_1 = 15$ et $n_2 = 16$.

Exercice 17.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon i.i.d. distribué comme une variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 4.

1. Déterminer $\widetilde{\theta}_n$ l'estimateur de la méthode des moments de $\theta = (\mathbb{E}[X], \mathrm{Var}(X))^t$.
2. Etablir le comportement asymptotique de $\widetilde{\theta}_n$.
3. Soit $(Y_1, ..., Y_n)$ un échantillon i.i.d. distribué comme une variable aléatoire Y admettant un moment d'ordre 2. On suppose que les échantillons $(X_1, ..., X_n)$ et $(Y_1, ..., Y_n)$ sont mutuellement indépendants, tout comme le sont les variables aléatoires X et Y. Déterminer la loi asymptotique de la statistique suivante:

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X] - \overline{Y}_n + \mathbb{E}[Y]}{\sqrt{S_{n,X}^2 + S_{n,Y}^2}}.$$

   en notant

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad S_{n,X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

et

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{et} \quad S^2_{n,Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}_n\right)^2 .$$

4. En déduire une statistique sur laquelle fonder le test de l'hypothèse nulle H_0: $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ contre l'hypothèse alternative H_1: $\mathbb{E}[X] \neq \mathbb{E}[Y]$. Justifier.

5. Déterminer la région de rejet du test au niveau de risque de $1^{\text{ère}}$ espèce α de l'hypothèse nulle H_0: $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ contre l'hypothèse alternative H_1: $\mathbb{E}[X] \neq \mathbb{E}[Y]$. Détailler la mise en oeuvre ce test.

Exercice 18.
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de variables aléatoires i.i.d. de variable parente X dont la distribution admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} I(0 \leq x \leq \theta) \quad \text{avec } \theta > 0.$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition associée ainsi que l'espérance et la variance de X.
2. Le modèle est-il dominé?
3. Déterminer $\widetilde{\theta}_n$ l'estimateur de θ obtenu par la méthode des moments.
4. Déterminer $\widehat{\theta}_n$ l'estimateur de θ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance.
5. Déterminer le biais, la variance et le risque quadratique de $\widetilde{\theta}_n$ et $\widehat{\theta}_n$. Comparer $\widetilde{\theta}_n$ et $\widehat{\theta}_n$.
6. Etudier le comportement asymptotique de $\widetilde{\theta}_n$ et de $\widehat{\theta}_n$.
7. Quel estimateur préférez-vous? Justifier.
8. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique bilatéral symétrique de niveau $(1-\alpha)$ pour θ.

Exercice 19.
Un assureur s'intéresse aux sinistres que peuvent subir ses clients afin d'établir sa politique d'assurance. Soit X la variable aléatoire représentant le montant annuel (exprimé en milliers d'euros) des sinistres que subit un client pris au hasard. On suppose que X suit la loi de Pareto dont la distribution admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} I(x \geq 1).$$

où θ est un paramètre inconnu que l'on veut estimer. On dispose pour cela d'un échantillon i.i.d. $(X_1, ..., X_n)$ distribué comme X.

1. Quel est le support de la loi de X? Quel est l'espace naturel des paramètres noté Θ?

2. Calculer l'espérance de X et en déduire pourquoi on ne peut pas appliquer la méthode des moments pour estimer θ?

3. Déterminer $\widehat{\theta}_n$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Est-il biaisé? Est-il fortement consistant? Etudier son comportement asymptotique.

4. Proposer un estimateur de $\mathbb{P}[X > 1000]$. Justifier votre choix.

5. Déterminer un intervalle de confiance unilatéral asymptotique au niveau de confiance 95% pour $\mathbb{P}[X > 1000]$.

Exercice 20.
On considère le modèle admettant la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue, pour $\mu > 0$ et $\sigma > 0$:

$$f_{\mu,\lambda}(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right) I(x > 0).$$

On dispose d'un échantillon de n variables aléatoires $(X_1, ..., X_n)$ i.i.d. distribuées selon la loi de densité $f_{\mu,\lambda}$.

1. Déterminer l'estimateur de la méthode des moments $(\widetilde{\mu}_n, \widetilde{\lambda}_n)$ de (μ, λ). Etudier son comportement asymptotique.

2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\widehat{\mu}_n, \widehat{\lambda}_n)$ de (μ, λ). Etudier son comportement asymptotique.

Exercice 21.
Soit X une variable aléatoire de loi $P_{\alpha,\lambda}$ admettant la densité $f_{\alpha,\lambda}$ pour $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$ définie par

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \alpha\lambda^\alpha x^{-\alpha-1} I(x \geq \lambda)\,.$$

Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon i.i.d. de variable parente X.

1. Soit Y une variable aléatoire de loi admettant la densité $f_{\alpha,1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer $\mathbb{E}[\log Y]$ et $\mathrm{Var}(\log Y)$.

2. Montrer que si X suit la loi de densité $f_{\alpha,\lambda}$, alors $Y = \dfrac{X}{\lambda}$ suit la loi de densité $f_{\alpha,1}$. En déduire $\mathbb{E}[\log X]$ et $\mathrm{Var}(\log X)$.

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de (α, λ) noté $(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\lambda}_n)$.

4. Etablir le comportement asymptotique de $\widehat{\lambda}_n$.

5. Etablir le comportement asymptotique de $1/\widehat{\alpha}_n$. En déduire celui de $\widehat{\alpha}_n$.

6. Pourquoi ne peut-on pas utiliser la méthode des moments avec les moments de X?

Exercice 22.
On considère la famille de densités à deux paramètres inconnus $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$:

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) I(x \geq \alpha).$$

1. Soit X de densité $f_{\alpha,\beta}$. Déterminer les moments d'ordre k de X pour $k = 1, 2, 3, 4$ et calculer $\mathrm{Var}(X)$.
   Indication: si Y est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre égal à 1, alors $\mathbb{E}[Y^3] = 6$ et $\mathbb{E}[Y^4] = 24$.

2. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon i.i.d. de densité $f_{\alpha,\beta}$. Déterminer l'estimateur de la méthode des moments $\left(\widetilde{\alpha}_n, \widetilde{\beta}_n\right)$ de (α, β).

3. Etablir la consistance et le comportement asymptotique de $\left(\widetilde{\alpha}_n, \widetilde{\beta}_n\right)$.

4. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\left(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n\right)$ de (α, β).

5. Etablir la consistance et le comportement asymptotique de $\widehat{\alpha}_n$.

6. Etablir la consistance et le comportement asymptotique de $\widehat{\beta}_n$.