
TP2: illustration des propriétés fréquentistes d'un test statistique d'hypothèses

Le but de ce TP est de proposer une illustration par simulations des propriétés fréquentistes d'un test statistique d'hypothèses. Considérons le cas d'un test de conformité (à un échantillon) qui consiste en une comparaison d'une moyenne à une norme fixée.

Problème posé: Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 1 et représentant la quantité d'intérêt. On se demande si la moyenne $\mathbb{E}[X]$ d'une variable X est égale ou non à une certaine valeur m_0 fournie par l'expérimentateur. Comme la réponse à cette question est inconnue en pratique, on réalise une expérience qui permet de recueillir une réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ d'un échantillon de .v.a.i.i.d. $(X_1, \dots, X_n)$ toutes distribuées comme X . On doit alors décider sur la base des observations recueillies $(x_1, \dots, x_n)$ si l'on retient l'hypothèse $\mathbb{E}[X] = m_0$ ou bien l'hypothèse $\mathbb{E}[X] \neq m_0$. Evidemment, lorsqu'on prend une décision en situation d'incertitude, on risque de se tromper.

La théorie des tests introduit une dissymétrie entre H_0 et H_1 car elle propose de contrôler en priorité le risque de rejeter H_0 à tort. Ce risque est appelé risque de 1^{ère} espèce. Le majorant choisi a priori par le statisticien est noté α et typiquement vaut 0.05.

Notons

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

et $\bar{x}_n$ la réalisation de $\bar{X}_n$. Notons également

$$S_n'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Méthode: la théorie des tests requiert de définir deux hypothèses notées H_0 (appelée hypothèse nulle) et H_1 (appelée hypothèse alternative) en contradiction avec H_0 . Choisissons ici $H_0: \mathbb{E}[X] = m_0$ et $H_1: \mathbb{E}[X] \neq m_0$. L'estimation $\bar{x}_n$ nous fournit une approximation de $\mathbb{E}[X]$. Intuitivement, lorsque $\bar{x}_n$ est proche de m_0 , on peut retenir H_0 tandis que lorsque $\bar{x}_n$ est loin de m_0 , on peut retenir H_1 . A quel point $\bar{x}_n$ doit être éloigné de m_0 pour que l'on puisse rejeter $H_0: \mathbb{E}[X] = m_0$? Peut-on contrôler le risque d'erreur associé à cette décision? Pour répondre à ces questions, on passe par la construction d'une statistique de test notée T_n (impliquant souvent la différence ou le ratio entre $\bar{X}_n$ et m_0) de sorte que la loi de T_n est connue (au moins asymptotiquement) sous H_0 et sous H_1 et permette de discriminer les deux hypothèses. Typiquement, on cherche à ce que T_n ait tendance à être grande (en valeur absolue) sous H_0 et à ce que T_n diverge en probabilité sous H_1 . Dans la suite, on travaille avec

$$T_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sqrt{S_n'^2}}.$$

La valeur critique k_α au delà de laquelle on rejette H_0 est alors déterminée de sorte que l'on contrôle la probabilité de rejeter H_0 à tort en majorant cette probabilité par α .

1^{er} cas: la taille de l'échantillon n est assez grande pour que les approximations asymptotiques soient valides.

On peut montrer que, sous H_0 , la convergence en loi suivante a lieu lorsque $n \rightarrow \infty$:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Sous H_1 , on peut montrer que, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$|T_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty.$$

- lorsque $|T_n| \leq k_\alpha$, on décide que l'on accepte provisoirement H_0 jusqu'à preuve du contraire.
- lorsque $|T_n| > k_\alpha$, on décide que l'on rejette H_0 .

La valeur critique k_α est déterminée de sorte que l'on contrôle la probabilité de rejeter H_0 à tort en majorant cette probabilité par α . Cela fournit ici $k_\alpha = F_{\mathcal{N}(0,1)}^{-1}(1 - \alpha/2) =$ quantile d'ordre $(1 - \alpha/2)$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

2^{ème} cas: X est une variable gaussienne, n est quelconque.

Lorsque $n \rightarrow \infty$, sous H_0 , la statistique T_n suit la loi de Student à $(n - 1)$ degrés de liberté, notée $T(n - 1)$. Sous H_1 , lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$|T_n| \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty.$$

La prise de décision se pose alors ainsi:

- lorsque $|T_n| \leq k_\alpha$, on décide que l'on accepte provisoirement H_0 jusqu'à preuve du contraire.
- lorsque $|T_n| > k_\alpha$, on décide que l'on rejette H_0 .

La valeur critique k_α est alors déterminée de sorte que l'on contrôle la probabilité de rejeter H_0 à tort en majorant cette probabilité par α . Cela fournit ici $k_\alpha = F_{T(n-1)}^{-1}(1 - \alpha/2) =$ quantile d'ordre $(1 - \alpha/2)$ de la loi $T(n - 1)$.

• Illustration numérique:

Elaborer un plan de simulations explicitant le nombre d'échantillons générés noté M , la taille requise pour l'échantillon que l'on a notée n et les différentes lois utilisées pour simuler les échantillons. Vous étudierez de façon empirique:

1. la nature de la loi de la statistique de test sous H_0 ,
2. la nature de la loi de la statistique de test sous H_1 ,
3. la probabilité d'erreur de 1^{ère} espèce définie comme étant la proportion de fois où le test rejette H_0 à tort,

4. la probabilité d'erreur de 2nde espèce définie comme étant la proportion de fois où le test accepte H_0 à tort.

On utilisera les valeurs $M = 1000$ et $n \in \{20, 50, 100, 200, 500\}$.

Le travail à effectuer peut se mettre sous la forme de l'algorithme suivant:

- fixer m_0 ,
- choisir une loi de probabilité pour X (y compris les paramètres de cette loi), ce qui fixe la valeur de $\mathbb{E}[X]$,
- pour $n = 20, 50, 100, 200, 500$,
 - pour $m = 1, \dots, M$,
 - simuler un échantillon i.i.d. $(X_1^{\{m\}}, \dots, X_n^{\{m\}})$ selon la loi choisie,
 - déterminer la réalisation de la statistique de test $T_n^{\{m\}}$,
 - déterminer si le test accepte ou rejette l'hypothèse nulle,
 - déterminer la proportion d'erreur de 1^{ère} espèce ou la proportion d'erreur de 2nde espèce, selon le cas considéré,
 - représenter graphiquement le comportement de la statistique de test.