Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - étude de cas

Ségolen Geffray
Année 2016/2017
Mercredi 3 mai 2017

Contrôle continu

La durée de l'épreuve est 2h.
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés.
Les notes de cours (comme tout autre document) et les calculatrices ne sont PAS autorisées.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
La qualité de la rédaction sera largement prise en compte.

Exercice 1.

1. Montrer que le modèle $(\mathcal{B}(p))_{p\in]0,1[}$ est complet.
2. Déterminer la matrice d'information de Fisher du modèle, si cela est possible.
3. Soit $(X_1,...,X_n)$ un échantillon de loi $\mathcal{B}(p)$ pour un $p\in]0,1[$. Exhiber une statistique exhaustive pour p. Est-elle complète ? minimale ?
4. Proposer un estimateur de p. Justifier.
5. Etablir son comportement asymptotique.
6. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique bilatéral symétrique pour p au niveau de confiance $(1-\alpha)$.
7. Déterminer un intervalle de confiance à distance finie bilatéral symétrique pour p au niveau de confiance $(1-\alpha)$ en utilisant l'inégalité de Chebyshev.
8. Déterminer un intervalle de confiance à distance finie bilatéral symétrique pour p au niveau de confiance $(1-\alpha)$ en utilisant l'inégalité de Hoeffding.

Exercice 2.

Soit $(X_1,...,X_n)$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un $\lambda>0$.
Il s'agit d'estimer $\theta=\mathbb{P}(X_1=0)$.

1. Déterminer une statistique exhaustive pour θ notée T_n.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ noté $\widehat{\theta}_n$.
3. Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est biaisé à distance finie.
4. Etablir le comportement asymptotique de $\widehat{\theta}_n$.
5. Déterminer l'estimateur amélioré de Rao-Blackwell de l'estimateur $I(X_1=0)$ par conditionnement avec T_n.