Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - études de cas

Ségolen Geffray
geffray@math.unistra.fr
Année 2014/2015

Sujet 4: variations autour de la méthode de Monte-Carlo

• **Echantillonnage stratifié**:
On veut calculer $I = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \displaystyle\int \varphi(x)f(x)dx$ où X est une variable aléatoire de $\mathbb{R}^d$ admettant la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. On introduit une partition $(A_j)_{j=1,\dots,J}$ de $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$ et on pose $p_j = \mathbb{E}[\varphi(X)|X \in A_j]$ pour $j = 1, ..., J$. On réécrit alors I sous la forme:

$$I = \sum_{j=1}^{J} \mathbb{E}[\varphi(X)|X \in A_j]\mathbb{P}(X \in A_j) = \sum_{j=1}^{J} p_j I_j \,.$$

L'idée de la méthode consiste à estimer I_j par la moyenne empirique $\widehat{I_j}$ d'un échantillon de taille n_j de la loi conditionnelle de X sachant $\{X \in A_j\}$, ce qui mène à l'estimateur suivant de I:

$$\widehat{I}_n^S = \sum_{j=1}^{J} p_j \widehat{I}_j \,.$$

L'estimateur $\widehat{I}_n^S$ est sans biais pour I et fortement consistant lorsque $n_j \to \infty$ pour $j = 1, ..., J$. Notons $\sigma_j^2 = \mathrm{Var}(\varphi(X)|X \in A_j)$. Si les estimateurs $\widehat{I}_j$ pour $j = 1, ..., J$ sont indépendants, alors la variance de $\widehat{I}_n^S$ est donnée par

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_n^S\right) = \sum_{j=1}^{J} \frac{p_j^2 \sigma_j^2}{n_j} \,.$$

Si l'on dispose d'un total de $n = \displaystyle\sum_{j=1}^{J} n_j$ simulations, alors alors le minimum de $\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_n^S\right)$ sous la contrainte de $n = \displaystyle\sum_{j=1}^{J} n_j$ est réalisé lorsque $\sigma_j = c p_j \sigma_j$ pour $j = 1, ..., J$ soit

$$n_j = n \, \frac{p_j \sigma_j}{\sum_{k=1}^{J} p_k \sigma_k}$$

et vaut

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_n^S\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{J} p_j \sigma_j\right)^2 \,.$$

Il reste à comparer cette variance à la variance de l'estimateur par la méthode Monte-Carlo usuelle $\widehat{I}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i)$ laquelle vaut

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_n\right) = \frac{\mathrm{Var}(\varphi(X))}{n} \,.$$

Décomposons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\varphi(X)) &= \mathbb{E}\left[\varphi(X)^2\right] - \mathbb{E}\left[\varphi(X)\right]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{J} p_j \mathbb{E}\left[\varphi(X)^2 | X \in A_j\right] - \left(\sum_{j=1}^{J} p_j \mathbb{E}\left[\varphi(X) | X \in A_j\right]\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{J} p_j \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{J} p_j \mathbb{E}\left[\varphi(X) | X \in A_j\right]^2 - \left(\sum_{j=1}^{J} p_j \mathbb{E}\left[\varphi(X) | X \in A_j\right]\right)^2
\end{aligned}
$$

Utilisons la convexité de la fonction $x \to x^2$ et le fait que $\sum_{j=1}^{J} p_j = 1$ pour obtenir que

$$
\sum_{j=1}^{J} p_j \mathbb{E}\left[\varphi(X) | X \in A_j\right]^2 \geq \left(\sum_{j=1}^{J} p_j \mathbb{E}\left[\varphi(X) | X \in A_j\right]\right)^2
$$

et donc

$$
\mathrm{Var}(\varphi(X)) \geq \sum_{j=1}^{J} p_j \sigma_j^2 .
$$

En réutilisant la convexité de la fonction $x \to x^2$ et le fait que $\sum_{j=1}^{J} p_j = 1$, on en conclut que

$$
\mathrm{Var}(\widehat{I}_n) \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^{J} p_j \sigma_j\right)^2 = \mathrm{Var}\left(\widehat{I}_n^S\right) .
$$

Notons toutefois que le choix optimal de n_j demande de connaître les variances conditionnelles σ_j^2 ce qui n'est pas toujours le cas. On peut penser les estimer à leur tour par méthode de Monte-Carlo ... mais il faut prendre garde au fait qu'un mauvais choix des n_j peut augmenter la variance. Cependant, notons que le choix $n_j = np_j$ diminue toujours la variance même s'il n'est pas optimal. En effet, dans ce cas, on a

$$
\mathrm{Var}\left(\widehat{I}_n^S\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{J} p_j \sigma_j^2 \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\varphi(X)\right)}{n} = \mathrm{Var}(\widehat{I}_n) .
$$

Pour simuler des variables selon une loi uniforme stratifiée, on peut procéder comme suit:

- on choisit une partition de $]0, 1] = \bigcup_{j=1}^{J} A_j$ où les A_j sont disjoints et de la forme $A_j =]a_j, b_j]$ (typiquement, on peut choisir $A_j = \left]\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}\right]$)
- la loi de $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ conditionnelle à $\{U \in A_j\}$ est la loi $\mathcal{U}(a_j, b_j)$
- on génère donc un échantillon de taille n_j de $V_{i,j} \sim \mathcal{U}(a_j, b_j)$
- on fournit les variables $V_{i,j}$

Pour simuler des variables selon une loi quelconque de fonction de répartition associée notée F stratifiée, on peut procéder comme suit:

- on choisit la partition de $]0,1] = \bigcup_{j=1}^{J} A_j$ où les A_j sont de la forme $A_j =]a_{j-1}, a_j]$ avec $a_0 = -\infty$, $a_j = F^{-1}\left(\sum_{\ell=1}^{j} p_\ell\right)$ pour $j = 1, ..., J$ où l'on se donne les p_j sont tels que $0 < p_j < 1$ et $\sum_{j=1}^{J} p_j = 1$.
  NB: dans le cas où $a_J = +\infty$, on prend $A_j =]a_{J-1}, a_J[$
- la loi de $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ conditionnelle à $\{U \in A_j\}$ est la loi $\mathcal{U}(a_j, b_j)$
- on génère un échantillon de taille n_j de $V_{i,j} \sim \mathcal{U}(a_{j-1}, a_j)$
- on fournit les variables $Y_{i,j} = F^{-1}(V_{i,j})$ qui suivent la loi F sachant que $Y_{i,j} \in A_j$.

Exercice 1.
Calculer une estimation de π en utilisant le fait que l'intégrale suivante vaut π:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Pour cela, vous utiliserez tour à tour:

1. la méthode de Monte-Carlo usuelle,
2. la méthode des variables antithétiques,
3. la méthode de stratification,
4. la méthode de l'échantillonnage préférentiel en coupant l'intégrale en deux et en choisissant sur chaque morceau une loi de proposition de densité affine.

Comparer l'efficacité des différentes méthodes mises en oeuvre.