Université de Strasbourg
M1 - Magistère
Statistique - études de cas

Ségolen Geffray
geffray@math.unistra.fr
Année 2014/2015

Sujet 7: variations autour de la méthode de Monte-Carlo

• **Méthode des variables de contrôle**:
Le principe de la méthode consiste à trouver une variable aléatoire Y et une constante c telles que

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[Y] + c \text{ et } \mathrm{Var}(Y) < \mathrm{Var}(\varphi(X))\,.$$

Cette méthode permet certes de diminuer la variabilité des entrées... mais entraîne une augmentation du temps de calcul. Pour trouver Y, on cherche une décomposition de $\mathbb{E}[\varphi(X)]$ de la forme

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \mathbb{E}[\underbrace{\varphi(X) - h(X)}_{=Y}] + \underbrace{\mathbb{E}[h(X)]}_{=c}$$

où $\mathbb{E}[h(X)]$ peut être calculé analytiquement et où $\mathrm{Var}(\varphi(X) - h(X)) < \mathrm{Var}(\varphi(X))$.

• **Algorithme d'acceptation-rejet** (*rejection-sampling*):

- On souhaite simuler un échantillon i.i.d. distribué selon une loi admettant une densité f. Considérons le cas où il est difficile voire imposible de simuler directement des variables selon la loi admettant une densité f. La méthode d'acceptation-rejet s'applique pourvu qu'il existe une densité g selon laquelle il est facile de simuler des variables et une constante M qui vérifient pour tout $x \in \mathrm{supp}(f)$,

$$f(x) \leq Mg(x)\,.$$

- Principe: simuler des Y_i selon une loi de proposition notée g (idéalement proche de f) selon laquelle il est facile de générer des échantillons aléatoires puis conserver seulement les Y_i qui ont une bonne chance de pouvoir être issus de f...

- Comment mettre cela en oeuvre? Voyons comment générer une variable $X \sim f$:

Algorithme 1. *1. Générer $Y_1 \sim g$ et $U_1 \sim \mathcal{U}[0,1]$*

2. Accepter $X = Y_1$ ssi

$$U_1 \leq \frac{f(Y_1)}{Mg(Y_1)}.$$

3. Si on rejette Y_1, recommencer en générant pour $k \geq 2$, $Y_k \sim g$ et $U_k \sim \mathcal{U}[0,1]$ jusqu'à l'instant k_0 où $U_{k_0} \leq f(Y_{k_0})/(Mg(Y_{k_0}))$. On pose alors $X = Y_{k_0}$.

- Pourquoi ça marche?

Proposition 1. *La variable aléatoire X simulée par l'algorithme 1 a pour densité f. La probabilité d'acceptation d'une proposition est égale à $1/M$.*

Preuve: Calculons d'abord la probabilité d'acceptation p

$$
\begin{aligned}
p = P\left(U \leq \frac{f(Y)}{Mg(Y)}\right) &= \int\int \mathbb{1}_{\{u \leq \frac{f(y)}{Mg(y)}\}} f_U(u) g(y) du dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\frac{f(y)}{Mg(y)}} f_U(u) du \cdot g(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(y)}{Mg(y)}\right) g(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{Mg(y)} \cdot g(y) dy \\
&= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = \frac{1}{M}
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant la loi de X.

$$
\begin{aligned}
P(X \leq x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{X = Y_n\} \cap \{X \leq x\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} \left\{U_k > \frac{f(Y_k)}{Mg(Y_k)}\right\} \bigcap \left\{U_n \leq \frac{f(Y_n)}{Mg(Y_n)}\right\} \bigcap \{Y_n \leq x\}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \mathbb{P}\left(\left\{U_1 \leq \frac{f(Y_1)}{Mg(Y_1)}\right\} \cap \{Y_1 \leq x\}\right) \\
&= \frac{1}{p} \mathbb{P}\left(\left\{U_1 \leq \frac{f(Y_1)}{Mg(Y_1)}\right\} \cap \{Y_1 \leq x\}\right) \\
&= \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{x} \mathbb{P}\left(U_1 \leq \frac{f(y)}{Mg(y)}\right) g(y) dy \\
&= \frac{1}{p} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{M} f(y) dy = \int_{-\infty}^{x} f(y) dy. \qquad \square
\end{aligned}
$$

- NB: le fait que, pour tout $x \in \operatorname{supp}(f)$,

$$f(x) \leq Mg(x),$$

  implique que les queues de f sont nécessairement plus légères que celles de g.

Corollaire 0.1. *si f n'est connue qu'à une constante près (ie pour tout $x \in supp(f)$, on a $f(x) = c\pi(x)$ où c est la constante de normalisation inconnue), alors on peut faire tourner l'algorithme d'acceptation-rejet avec π à la place de f pourvu que $\pi(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in supp(f)$.*

Exercice 1.

1. Simuler par méthode d'acceptation-rejet des variables aléatoires de loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est connue à une constante près, à savoir

$$f(x) \propto \exp(\cos^2(x)) I(-\pi/2 < x < \pi/2)\,.$$

2. Déterminer une approximation de $I = \int_0^{\pi/2} \exp(\cos^2(x))dx$ en utilisant tour à tour

   (a) la méthode de Monte-Carlo usuelle,

   (b) la méthode de Monte-Carlo avec la variable de contrôle $Y = \alpha \cos^2 U$ où U suit la loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ (pour un α bien choisi),

   (c) la méthode de Monte-Carlo avec la variable antithétique $U = \cos^2(X)$ et la transformation $T(u) = 1 - u$.