Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année
Probabilités et Statistiques S4
25 février 2022

Contrôle continu N°1

Tous les documents sont interdits. La calculatrice et le téléphone portable sont également interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 90 minutes

Attention, le sujet est recto-verso

Responsable : Davide Giraudo

Exercice 1

Deux joueurs J_1 et J_2 s'affrontent dans le cadre du jeu suivant : J_1 pioche deux boules sans remise dans une urne contenant 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5, puis note le numéro des boules tirées, sans tenir compte de l'ordre. Le joueur J_2 fait de même dans une autre urne contenant également 5 boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5. Le joueur J_1 :

- gagne si les deux boules qu'il a tirées sont les même que celles du joueur J_2 ;
- perd si aucune des boules qu'il a tirées ne coïncide avec celles du joueur J_2 et
- fait match nul si exactement une boule coïncide avec celles du joueur J_2.

1. On se propose de modéliser l'expérience aléatoire de la manière suivante : on prend

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,$$

où $\Omega_1 = \Omega_2$ est la collection des sous-ensembles de $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ ayant exactement 2 éléments. Un résultat de l'expérience aléatoire est par exemple $(\{2; 4\}, \{1; 3\})$ (dans ce cas, J_2 gagne) ou encore $(\{2; 5\}, \{1; 5\})$ (et dans ce cas, la partie est nulle).

   (a) Déterminer le cardinal de Ω_1.

   (b) En déduire le cardinal de Ω.

2. On munit Ω de la probabilité uniforme.

   (a) Soit A l'événement "le joueur J_1 gagne". Déterminer le nombre de résultats de l'expérience aléatoire pour lesquels A se réalise et en déduire $\mathbb{P}(A)$.

   (b) Soit B l'événement "le joueur J_1 perd". Déterminer le nombre de résultats de l'expérience aléatoire pour lesquels B se réalise et en déduire $\mathbb{P}(B)$.

   (c) Soit C l'événement "la partie est nulle". Déduire des questions précédentes $\mathbb{P}(C)$.

Exercice 2

1. Soient A_1 et A_2 deux événements indépendants tels que $\mathbb{P}(A_1) = p_1$ et $\mathbb{P}(A_2) = p_2$. Exprimer l'événement

   B : "Exactement un des événements parmi A_1, A_2 se produit"

   à l'aide de A_1, A_2 et leurs événements contraires et calculer sa probabilité.

2. Soient A_1, A_2 et A_3 des événements globalement indépendants tels que $\mathbb{P}(A_1) = p_1$, $\mathbb{P}(A_2) = p_2$ et $\mathbb{P}(A_3) = p_3$. Exprimer l'événement

   B : "Exactement un des événements parmi A_1, A_2, A_3 se produit"

   à l'aide de A_1, A_2, A_3 et leurs événements contraires et calculer sa probabilité.

3. **(Question bonus)** Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements globalement indépendants, où $\mathbb{P}(A_i) = p_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Exprimer l'événement

   B : "Exactement un des événements parmi $A_1, \dots, A_n$ se produit"

   à l'aide de $A_1, \dots, A_n$ et leurs événements contraires et calculer sa probabilité (ne pas chercher à simplifier).

Exercice 3

On place dans une urne 3 boules rouges et 4 boules blanches. On tire une boule, notée T_1, on la remet dans l'urne et on met dans l'urne une boule de la même couleur que T_1 puis on tire une boule, notée T_2. Tous les tirages sont supposés équiprobables. On considère les événements

A : "la première boule tirée T_1 est blanche"

B : "la seconde boule tirée T_2 est blanche".

1. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B \mid A)$.

2. Déterminer $\mathbb{P}(B)$.

3. Déterminer $\mathbb{P}(A \mid B)$.

Exercice 4

Soient A, B et C trois évènements globalement indépendants tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

1. Soit D l'événement défini par $D = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$. Calculer $\mathbb{P}(D)$.

2. Déterminer si D est indépendant de A.

3. Soit E l'événement défini par

   $$E = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C).$$

   Calculer $\mathbb{P}(E)$.

4. Déterminer si E est indépendant de A.

5. Déterminer si E est indépendant de D.

6. **(Question bonus)** Les événements A, D et E sont-ils globalement indépendants ?