Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques et d'Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année
Probabilités et Statistiques S4
3 mars 2023

**Contrôle continu N°1**

Tous les documents sont interdits. La calculatrice et le téléphone portable sont également interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

**Durée de l'épreuve : 90 minutes**

**Attention, le sujet est recto-verso**

# Exercice 1

1. Rappeler la définition de trois événements globalement indépendants.
2. Soient $A, B$ et $C$ trois événements globalement indépendants. En utilisant seulement la définition et la formule donnant la probabilité de la réunion de deux événements non nécessairement incompatibles, démontrer que $C$ est indépendant de $A \cup B$.

# Exercice 2

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. "pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et pour tous événements $A$ et $B$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \mid B) \geqslant \mathbb{P}(A)$".
2. "pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et pour tous événements $A$ et $B$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \mid B) \leqslant \mathbb{P}(A)$".
3. "pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et pour tous événements $A$ et $B$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A^c \mid B) = 1$".
4. "pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et pour tous événements $A$ et $B$ tels que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$, $\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A \mid B^c) = 1$".

Pour chaque affirmation, on donnera une démonstration ou un contre-exemple simple avec $\Omega$ fini.

# Exercice 3

Deux amis, disons $A_1$ et $A_2$, décident de jouer au jeu suivant pour déterminer qui va payer l'addition. Ils lancent deux fois une pièce ayant une probabilité $p \in [0, 1]$ de faire pile et $1 - p$ de faire face. S'il y a deux faces, c'est $A_1$ qui paye l'addition, sinon c'est $A_2$.

1. Proposer un espace probabilisé pour modéliser cette expérience.
2. Déterminer les valeurs de $p$ pour lesquelles :
   (a) $A_1$ a plus de chances de payer l'addition.
   (b) $A_2$ a plus de chances de payer l'addition.
   (c) $A_1$ et $A_2$ ont autant de chances de payer l'addition.

# Exercice 4

On souhaite se rendre d'une ville $V_1$ à une ville $V_2$. Pour cela, il existe exactement trois itinéraires :

— la route directe $R_1$,

— prendre la route $R_2$, reliant $V_1$ à $V_3$ puis la route $R_3$, reliant $V_3$ à $V_2$

— prendre la route $R_4$, reliant $V_1$ à $V_4$ puis la route $R_5$, reliant $V_4$ à $V_2$.

De mauvaises conditions climatiques font que chaque route $R_i$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$, a une probabilité $p$ d'être praticable et les événements $A_i$ : "la route $R_i$ est praticable" sont globalement indépendants.

Soit $A$ l'événement : "on peut se rendre de la ville $V_1$ à la ville $V_2$".

1. Exprimer $A$ à l'aide des événements $A_i$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $p$.

# Exercice 5

1. Soit $n \geqslant 1$ et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ muni de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, la collection de tous les sous-ensembles de $\Omega$. Déterminer toutes les mesures de probabilités $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$ vérifiant la propriété suivante : pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, si $A$ et $B$ sont des événements incompatibles, alors $A$ et $B$ sont indépendants.
2. Existe-t-il un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $A$ et $B$ sont incompatibles ? Si oui, donner un exemple, sinon, montrer que cela n'existe pas.