Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année
Probabilités et Statistiques S4
6 mai 2022

Contrôle continu N°2, épreuve convoquée

- Tous les documents sont interdits.
- La calculatrice et le téléphone portable sont également interdits et doivent rester dans votre sac.
- Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 90 minutes

Attention, le sujet est recto-verso

Responsable : Davide Giraudo

Exercice 1

Deux équipes E_1 et E_2 s'affrontent au cours d'un match. L'équipe qui marque un nombre de points strictement supérieur à celui de l'autre équipe gagne le match, en cas d'égalité, on dit qu'il y a match nul. Pour simplifier, on suppose qu'aucune des équipes ne marquera strictement plus que deux points. On note S_1 (respectivement S_2) le nombre de points inscrits par l'équipe E_1 (respectivement E_2). Le tableau suivant donne $\mathbb{P}(S_1 = x, S_2 = y)$ pour $x, y \in \{0, 1, 2\}$.

S_2 \ S_1	0	1	2
0	0.2	0.2	α
1	0.1	0.1	0.05
2	0.2	0.05	0.05

1. Donner l'unique valeur possible pour α en justifiant votre réponse.
2. Exprimer les événements
   - A : "l'équipe E_1 gagne",
   - B : "l'équipe E_2 gagne" et
   - C : "il y a match nul"

   à l'aide du couple de variables aléatoires (S_1, S_2).

   Déterminer ensuite $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
3. Calculer la loi marginale de S_1.
4. Calculer la loi marginale de S_2.
5. Les variables aléatoires S_1 et S_2 sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $\mathbb{P}(S_1 = k | S_2 = 1)$ pour les différentes valeurs possibles de k.
7. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_1 - S_2$ ainsi que son espérance et sa variance.
8. Déterminer la loi de la variable aléatoire $|S_1 - S_2|$ ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ un nombre réel et soit X_a une variable aléatoire telle que

$$\mathbb{P}\left(X_a = -1\right) = \mathbb{P}\left(X_a = 0\right) = \mathbb{P}\left(X_a = a\right) = 1/3. \tag{1}$$

1. Déterminer l'espérance et la variance de X_a.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_a^2.
3. Soit $k \geqslant 1$ un entier. Calculer $\mathbb{E}\left[X_a^k\right]$.
4. Exprimer $\operatorname{Cov}\left(X_a, X_a^2\right)$ comme un polynôme [une expression correcte qui n'est pas sous forme factorisée sera acceptée].
   Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho\left(X_a, X_a^2\right)$. Pour quelle(s) valeur(s) de a celui-ci s'annule-t-il ?
5. Existe-t-il une valeur de $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ telle que X_a est indépendante de X_a^2 ? [Il va de soi qu'un raisonnement est attendu.]
6. **Question bonus.** Déterminer $\lim_{a \to -\infty} \rho\left(X_a, X_a^2\right)$ et $\lim_{a \to +\infty} \rho\left(X_a, X_a^2\right)$.

Exercice 3

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Deux joueurs, disons A et B, jouent au jeu suivant. Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \ldots, n$. Le joueur A pioche une boule, note son numéro noté X_n puis la remet dans l'urne. Ensuite, le joueur B pioche une boule dans l'urne et note son numéro, noté Y_n.

Le joueur A gagne un euro si $X_n \geqslant Y_n$ et perd deux euros si $X_n < Y_n$.

1. Soit G_n le gain en euros du joueur A. Déterminer la loi de G_n.
2. Calculer l'espérance de G_n. Existe-t-il une valeur de n pour laquelle cette espérance est nulle ?
3. Si vous étiez le joueur A et que vous pouviez choisir la valeur de $n \geqslant 2$ avec laquelle le jeu se déroulerait, que choisiriez-vous ? Pourquoi ?