Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques et d'Informatique

Licence $2^{\text{ème}}$ année
Probabilités et Statistiques S4
21 avril 2023

Contrôle continu N°2

Tous les documents sont interdits. La calculatrice et le téléphone portable sont également interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 90 minutes

Attention, le sujet est recto-verso

Exercice 1

Deux équipes E_1 et E_2 s'affrontent au cours d'un match. L'équipe qui marque un nombre de points strictement supérieur à celui de l'autre équipe gagne le match, en cas d'égalité, on dit qu'il y a match nul. Pour simplifier, on suppose qu'aucune des équipes ne marquera strictement plus que deux points. On note S_1 (respectivement S_2) le nombre de points inscrits par l'équipe E_1 (respectivement E_2). Le tableau suivant donne $\mathbb{P}(S_1 = x, S_2 = y)$ pour $x, y \in \{0, 1, 2\}$.

S_2 \ S_1	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	α
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

1. Donner l'unique valeur possible pour α en justifiant votre réponse.
2. Exprimer les événements
   - A : "l'équipe E_1 gagne",
   - B : "l'équipe E_2 gagne" et
   - C : "il y a match nul"

   à l'aide du couple de variables aléatoires (S_1, S_2).

   Déterminer ensuite $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.
3. Calculer la loi marginale de S_1.
4. Calculer la loi marginale de S_2.
5. Les variables aléatoires S_1 et S_2 sont-elles indépendantes ?
6. Calculer $\mathbb{P}(S_1 = k | S_2 = 1)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.
7. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_1 - S_2$ ainsi que son espérance et sa variance.
8. **Question bonus.** Déterminer la loi de la variable aléatoire $|S_1 - S_2|$ ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes où X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (donc $\mathbb{P}(X=0)=1-p$, $\mathbb{P}(X=1)=p$) et Y une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

1. Rappeler (sans démonstration) l'expression de l'espérance et de la variance de X et de Y.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur le couple (p,λ) pour qu'il existe un $\mu>0$ tel que $X+Y$ suive une loi de Poisson de paramètre μ.

Exercice 3

Pour $a\in[0,1/3]$, on se donne un couple de variables aléatoires (X_a,Y_a) à valeurs dans $\{0,1\}\times\{0,1\}$ dont la loi jointe est donnée par

Y_a \ X_a	0	1
0	a	a
1	a	$1-3a$

1. Déterminer les lois marginales de X_a et de Y_a.
2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles X_a est indépendante de Y_a.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_a,Y_a)$ en précisant les valeurs de a pour lesquelles il est bien défini.

Exercice 4

Soit la série statistique

$$2,\quad 6,\quad -1,\quad 5,\quad 4.$$

1. Déterminer la moyenne empirique.
2. Déterminer la médiane de cette série.
3. Déterminer l'étendue de cette série.
4. Déterminer les premier, deuxième et troisième quartiles de cette série. En déduire la distance interquartile de cette série.
5. **Question bonus.** Déterminer le quantile empirique $q_{n,p}$ pour une probabilité $p\in\,]0,1[$.