Université de Strasbourg — Département de mathématique
L2 Mathématiques / Mathématiques et Physique Approfondies
S3 année 2024-2025

Travaux Dirigés de l'UE Probabilités et Statistiques S3

1 Dénombrement

Exercice 1

Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre et de décider à pile ou face qui règle l'addition. Eugène se lamente d'avoir payé les quatre dernières additions et Diogène, pour faire plaisir à son ami, propose de modifier exceptionnellement la règle : "Eugène, tu vas lancer la pièce cinq fois et tu ne paieras que si on observe une suite d'au moins trois piles consécutifs ou d'au moins trois faces consécutives". Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. À tort ou à raison ?

Exercice 2

Une urne contient N boules numérotées $1, 2, \ldots N$. On tire N boules sans remise, en tenant compte de l'ordre.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages où la boule numérotée N est tirée en dernier ? En premier ?
3. Soit $k \in \{1, \ldots, N\}$. Quelle est la probabilité de tirer la boule numérotée N au k^{e} tirage ?

Exercice 3

On veut former un comité de 7 personnes, constitué de 2 démocrates, 2 républicains, et 3 indépendants. On a le choix parmi 6 démocrates, 5 républicains, et 4 indépendants. Combien de choix sont possibles ?

Exercice 4

Un groupe de 20 personnes, 12 hommes et 8 femmes doit prendre un car pour effectuer une excursion. Par suite de malentendus, il se présente un car ne comportant que 10 places et prendront part à l'excursion 6 hommes et 4 femmes.

1. Combien peut-on former de groupes possibles de 6 hommes et 4 femmes ?
2. En supposant que M. A et Mme B ne peuvent appartenir à la même excursion, combien de groupes possibles peut-on constituer ?

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 1

A, B et C étant des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, écrire les événements suivants :

1. A et B se produisent ;
2. A, B et C se produisent ;
3. A se produit seul ;
4. A et B se produisent, mais pas C ;
5. Au moins l'un des trois événements se produit ;
6. Au moins deux de ces trois événements se produisent ;
7. Aucun de ces événements ne se produit.

Exercice 2

Soient A et B deux événements de probabilités respectives a et b, que l'on suppose différente de 0 et de 1. Remplir le tableau suivant, où chaque colonne correspond à un cas de figure, uniquement à l'aide de a et de b.

	$A = \Omega \setminus B$	$A = B$	A et B sont indépendants
$\mathbb{P}(A \cap B)$			
$\mathbb{P}(A \mid B)$			
$\mathbb{P}(B \mid A)$			
$\mathbb{P}(A \cap B \mid A)$			
$\mathbb{P}(A \cup B)$			
$\mathbb{P}(A \mid A \cup B)$			
$\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A^c \mid B)$			
$\mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)$			

Exercice 3

1. Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. A est-il indépendant de lui-même ?
2. Soient A et A^c deux événements contraires d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. A et A^c sont-ils indépendants ?

Exercice 4

On lance deux pièces de monnaie et on considère les événements :
A "la première pièce donne face"
B "la deuxième pièce donne pile"
C "les deux pièces donnent le même résultat"

1. Les événements A, B, C sont-ils indépendants deux à deux ?

2. Les événements A, B, C sont-ils globalement indépendants ?

Exercice 5

Un atelier comporte 3 machines indépendantes entre elles A, B, C. Les probabilités de défaillance sont respectivement $\mathbb{P}\left(\text{défaillance de } A\right) = 0.1$; $\mathbb{P}\left(\text{défaillance de } B\right) = 0.2$; $\mathbb{P}\left(\text{défaillance de } C\right) = 0.3$. Quelle est la probabilité d'avoir exactement une machine en panne ?

Exercice 6

Une urne contient quatre boules rouges, trois boules noires, une boule blanche. On tire en une seule fois trois boules. On admet l'équiprobabilité des tirages.

On veut calculer la probabilité d'avoir :

A "deux boules rouges au moins"

B "deux boules de même couleur au moins"

C "une boule de chaque couleur"

1. Proposer un espace probabilisé fini permettant la description de cette situation.
2. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(C)$.

Exercice 7

On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'ainée est une fille ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?

On pourra considérer les événements :

$$\begin{aligned} G &: \text{"il y a au moins un garçon"}, \\ A &: \text{"l'aîné est une fille"}, \\ F &: \text{"il y a au moins une fille"}. \end{aligned}$$

Exercice 8

Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test sa sensibilité α, qui est la probabilité que le test soit positif si le sujet est malade, et sa spécificité β, qui est la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain.

1. Sachant que la probabilité d'être malade est de 1 pour 1000 personnes, calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain alors que votre test est positif, avec $\alpha = 98\%$ et $\beta = 97\%$.
2. Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif.

Exercice 9

Le jeu télévisé "la porte de la fortune" comporte trois portes : A, B et C. Derrière l'une d'entre elles se trouve un cadeau et rien derrière les deux autres. Vous choisissez au hasard une des trois portes sans l'ouvrir, par exemple la porte A. À ce moment-là, le présentateur, qui sait derrière quelle porte se trouve le cadeau, ouvre une porte parmi les deux B et C, derrière laquelle il n'y a évidement rien. On vous propose alors de changer ou non de porte, le but étant d'ouvrir la porte qui cache le cadeau afin de gagner. L'objectif de cet exercice est de déterminer votre meilleure stratégie.

1. On suppose que si le cadeau est derrière la porte A, alors le présentateur choisit au hasard entre les deux autres portes. Calculer la probabilité pour que le cadeau soit derrière la porte B sachant que le présentateur ouvre la porte C. Que faites-vous ?

2. On suppose que si le cadeau est derrière la porte A, alors le présentateur choisit systématiquement la porte B. Que faites-vous si le présentateur ouvre la porte B ?, la porte C ?

3. Montrer que quelle que soit la valeur de la probabilité pour que le présentateur ouvre la porte B (respectivement C) sachant que le cadeau est en A, vous avez intérêt à changer de porte. En déduire que la meilleure stratégie consiste à changer systématiquement de porte.

On pourra considérer les événements :

$$\begin{array}{ll} G_A : & \text{"le cadeau se trouve derrière la porte A"}, \\ G_B : & \text{"le cadeau se trouve derrière la porte B"}, \\ G_C : & \text{"le cadeau se trouve derrière la porte C"}, \\ O_A : & \text{"le présentateur ouvre la porte A"}, \\ O_B : & \text{"le présentateur ouvre la porte B"}, \\ O_C : & \text{"le présentateur ouvre la porte C"}. \end{array}$$

Exercice 10

Soient X et Y deux individus dont les durées de vie sont indépendantes et sont telles que

$$\mathbb{P}(X \text{ vive encore 9 ans}) = 2/5, \quad \mathbb{P}(Y \text{ vive encore 9 ans}) = 3/5.$$

Calculer les probabilités que :

1. X et Y vivent encore 9 ans ;
2. l'un des 2 au moins vive encore 9 ans
3. X seulement vive encore 9 ans
4. Y seulement vive encore 9 ans
5. X vive encore 9 ans sachant que l'un des 2 au moins vivra encore 9 ans.

Exercice 11

On modélise le temps qu'il fait à Strasbourg de la façon suivante : s'il fait beau le $n-$ième jour, alors la probabilité qu'il fasse beau le $(n+1)-$ième jour est $1/2$; s'il pleut le $n-$ième jour, alors la probabilité qu'il fasse beau le $(n+1)-$ième jour est $1/4$. On démarre au jour 0, où il pleut.

1. Calculer la probabilité qu'il pleuve le jour 2.
2. Sachant qu'il pleut le jour 2, calculer la probabilité qu'il ait plu le jour 1.
3. On note p_n la probabilité qu'il pleuve le jour n. Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, et déterminer la valeur de p_n. La suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle ?

3 Variables discrètes

Exercice 1

Calculer les fonctions génératrices des lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson. En déduire leur moyenne et leur variance.

Exercice 2

Neuf chevaux, quatre blancs et cinq noirs pénètrent un par un sur la piste d'un cirque. Ils sont distincts les uns par rapport aux autres par leur harnachement.

1. Combien existe-t-il de façons de les faire arriver sur la piste ?
2. On appelle X la variable aléatoire : nombre de chevaux blancs précédent le premier cheval noir. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

Exercice 3

On dispose d'une urne $\mathcal{U}$ contenant $\frac{1}{3}$ de boules noires et $\frac{2}{3}$ de boules blanches et d'une cible $\mathcal{C}$. On considère alors le jeu suivant : un joueur tire une première fois sur la cible $\mathcal{C}$: s'il l'atteint il a gagné la partie ; sinon il tire au hasard une boule dans l'urne $\mathcal{U}$: s'il obtient une boule noire, il a perdu la partie, sinon il remet la boule blanche dans l'urne et retire sur la cible. S'il l'atteint il a gagné la partie ; sinon il retire au hasard une boule dans l'urne ; s'il obtient une boule noire, il a perdu la partie ; sinon il remet la boule blanche dans l'urne et retire sur la cible et ainsi de suite...
Soit $p \in [0, 1]$ la probabilité qu'a le joueur d'atteindre la cible lors d'un tir. On note A_n, B_n, A, B, C les événements suivants $(n \in \mathbb{N}^*)$
A_n "le joueur gagne la partie à l'issue du $n-$ème tir"
B_n "le joueur perd la partie à l'issue du $n-$ème tir"
A "le joueur gagne la partie"
B "le joueur perd la partie"
C "la partie ne s'arrête pas"

1. Calculer, en fonction de n et p les probabilités de A_n et B_n.
2. Calculer, en fonction de p les probabilités de A, B et C.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de coups nécessaires pour arrêter la partie.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(X)$.
4. Sachant que le joueur a perdu la partie, calculer la probabilité que ce soit à l'issue du $n-$ème tir $(n \in \mathbb{N}^*)$ (on supposera dans cette question $p \neq 1$).
5. Étudier en fonction des valeurs de p, le fait que le joueur ait plus ou moins de chance de gagner à ce jeu.

Exercice 4

Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10 h et 11 h est de 1.8 par minute, et que le nombre X d'appels reçus par minute est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson ; calculer la probabilité pour qu'entre 10h53 et 10h54 il y ait :

1. aucun appel
2. un appel
3. deux appels
4. au moins deux appels
5. strictement plus de deux appels
6. deux, trois ou quatre appels.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ (i.e. $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$).

1. Vérifier que $\frac{1}{1+X}$ est une variable intégrable. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right]$.
2. Calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{(1+X)(2+X)}\right]$ et en déduire $\mathbb{E}\left[\frac{1}{2+X}\right]$.

Exercice 6

On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées.

1. On lui attribue un point par bonne réponse. Soit X le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de X ?
2. Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, il peut choisir à nouveau une des autres réponses proposées. On lui attribue alors $\frac{1}{2}$ point par bonne réponse. Soit Y le nombre de $\frac{1}{2}$ points obtenus lors de ces seconds choix. Quelle est la loi de Y ?
3. Quelle est la loi de $X + Y$? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Soit S le nombre total de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

Exercice 7

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules une à une avec remise. Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geqslant x)$ pour $x \in \{1, \dots, N\}$. En déduire la loi de X.
2. Donner la loi de Y.
3. Calculer $\mathbb{P}(X > x, Y \leqslant y)$ pour tout $(x, y) \in \{0, \dots, N\}^2$.

Exercice 8

Une variable aléatoire X prend les valeurs $k \in \{1, 2, 3, 6\}$, avec probabilité proportionnelle à k. Préciser la loi de X, son espérance, sa variance, et le coefficient de corrélation linéaire entre X et $(X - 3)^2$.

Exercice 9

Soient X et Y deux variable aléatoires indépendantes de loi binomiale de paramètres respectifs (n_1, p_1) et (n_2, p_2) avec $n_1, n_2 \geqslant 1$ et $p_1 p_2 > 0$. À quelle condition $X + Y$ est-elle de loi binomiale ?

Exercice 10

Soient X_1 de loi Poisson de paramètre $\lambda_1 > 0$ et X_2 de loi Poisson de paramètre $\lambda_2 > 0$. Ces deux variables sont supposées indépendantes entre elles.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
2. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, calculer la loi de X_1 sachant l'événement $\{X_1 + X_2 = \ell\}$.

Exercice 11

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1), \ldots, \mathcal{P}(\lambda_n)$. Déterminer la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$ où la suite p_n vérifie $n \times p_n \to \lambda > 0$ (on remarquera que cette condition implique que $p_n \to 0$). Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
3. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$ où la suite p_n vérifie $n \times p_n \to 0$ Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire constante (préciser la valeur de la constante).

4 Couples de variables aléatoires et convergence

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ telles que

$$\mathbb{P}\left(X = i, Y = j\right) = A\, C_{n-1}^{i-1} C_{n-1}^{j-1},\ \forall\,(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{1}$$

où A est une constante.

1. Trouver la constante A pour que (1) définisse une loi de probabilité.
2. Déterminer la loi marginale de X et celle de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = j\}$.
5. Calculer $\mathbb{E}\left[X\right]$ et $\mathrm{Var}\left(X\right)$.

Exercice 2

On lance n fois une pièce. On désigne par $p \in]0, 1[$ la probabilité d'avoir pile. Soit X le nombre de piles obtenu après ces n lancers et Y celui de face. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

Exercice 3

Un étudiant s'ennuie en cours et passe son temps à regarder par la fenêtre les feuilles tomber d'un arbre. On admet que le nombre de feuilles tombées à la fin du cours est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner $\mathbb{P}\left(X = k\right)$ et les valeurs possibles pour k.
2. Pour $\lambda > 0$, donner la valeur de
$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.$$
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
À chaque fois qu'une feuille tombe par terre, l'étudiant lance une pièce qui donne pile avec une probabilité p et face avec une probabilité $q = 1 - p, p \in]0, 1[]$. On note F et P le nombre de faces et de piles obtenus respectivement.
4. Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, expliquer de manière simple pourquoi la loi de F sachant $X = k$ est une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'expression de $\mathbb{P}(F = a|X = k)$. On donnera les valeurs possibles pour a.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$, calculer la quantité $\mathbb{P}(\{X = k\} \cap \{F = a\})$.
6. Montrer que $\mathbb{P}(F = a) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^a}{a!}$. Identifier la loi de F.
7. Donner, sans calculs, la loi de P.
8. Montrer que P et F sont indépendantes.
9. Calculer l'espérance de PF et la variance de $P + F$.

Exercice 4

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dont la loi jointe est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k, Y = \ell) = \begin{cases} p^2(1-p)^{\ell-2} & \text{si } 1 \leqslant k < \ell, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2}$$

avec $p \in]0, 1[$.

1. Vérifier qu'on a bien ainsi défini une loi de probabilité.
2. Déterminer la loi marginale de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Pour les valeurs de ℓ pour lesquelles cela a un sens, déterminer la loi de X sachant $\{Y = \ell\}$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$ (donc $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$ pour $k \geqslant 1$).

1. Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$, exprimer de la façon la plus simple possible

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > k).$$

2. Déterminer en fonction de p la probabilité que X prenne une valeur paire.
3. Écrire la loi du couple (X, Y).
4. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 6

Soient $X_1, ..., X_n, ...$ des variables aléatoires, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1.

1. Que vaut $\mathbb{P}(X_1 = k)$ et quelles sont les valeurs possibles prises par la variable aléatoire X_1 ?
2. Calculer la fonction génératrice de $\sum_{i=1}^n X_i$ et identifier la loi de $\sum_{i=1}^n X_i$.
3. Donner la définition de la convergence en probabilité.
4. Est-ce que $\sum_{i=1}^n X_i/n$ converge en probabilité ? Si oui vers quoi ?
5. Démontrer le résultat de la question 4. en utilisant une inégalité du cours.
6. Énoncer le théorème limite central.
7. En utilisant le théorème limite central donner la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leqslant n\right).$$

8. En déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$$