Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique

Licence 2ème année
Probabilités S3
21 octobre 2024

Contrôle continu N°1

Tous les documents sont interdits, la calculatrice et le téléphone portable sont interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 90 minutes

Attention, le sujet est recto-verso

Exercice 1 : vérification de l'assiduité

Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Soit $p := \mathbb{P}(A)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que A soit indépendant de lui-même.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que A soit indépendant de A^c.

Exercice 2

Une urne contient 5 boules blanches et 6 boules noires. On tire une boule, puis on remet dans l'urne la boule tirée et on rajoute une boule de la couleur tirée dans l'urne. On note B_i l'événement "une boule blanche a été tirée au i-ème tirage", N_i l'événement "une boule noire a été tirée au i-ème tirage", avec $i \in \{1, 2\}$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(N_1)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)$ et $\mathbb{P}(B_2 \mid N_1)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(B_2)$.

Exercice 3 : les bons et les mauvais tireurs

Deux groupes de tireurs cherchent à atteindre une cible. Celui des bons tireurs est constitué de 2 personnes, celui des mauvais de 3 personnes. Un bon tireur a une probabilité $4p$ d'atteindre la cible, un mauvais tireur p, avec $p \in [0, 1/4]$. On définit les événements

— B_1 "le tireur 1 du groupe des bons tireurs atteint la cible",
— B_2 "le tireur 2 du groupe des bons tireurs atteint la cible",
— M_1 "le tireur 1 du groupe des mauvais tireurs atteint la cible",

— M_2 "le tireur 2 du groupe des mauvais tireurs atteint la cible",
— M_3 "le tireur 3 du groupe des mauvais tireurs atteint la cible".

On suppose les événements B_1, B_2, M_1, M_2, M_3 globalement indépendants.

1. Déterminer la probabilité qu'au moins une personne du groupe des bons tireurs atteigne la cible.
2. Déterminer la probabilité qu'au moins une personne du groupe des mauvais tireurs atteigne la cible.
3. Déterminer la probabilité que M_1 se réalise sachant l'un des tireurs du groupe des mauvais tireurs atteigne la cible.
4. Quelle est la probabilité qu'aucun des cinq tireurs n'atteigne la cible ?

Exercice 4

1. Soit Ω un ensemble au plus dénombrable. Que doit vérifier $\mathbb{P}\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ pour être une probabilité ?
2. Soient E_1 et E_2 des événements deux à deux disjoints de Ω. Déterminer, à l'aide de la définition rappelée à la question 1, $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2)$ à l'aide de $\mathbb{P}(E_1)$ et de $\mathbb{P}(E_2)$.
3. Rappeler sans démonstration l'expression de $\mathbb{P}(A \cup B)$ à l'aide de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
4. Soient E et F deux événements indépendants. En utilisant uniquement le résultat de la question 2, démontrer que E et F^c sont également indépendants.
5. Rappeler la définition de trois événements A, B, C globalement indépendants.
6. On suppose que A_1, A_2, B, C sont 4 événements tels que
   (a) A_1, B, C sont globalement indépendants,
   (b) A_2, B, C sont globalement indépendants et
   (c) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

   Démontrer, en utilisant seulement les résultats des question précédentes, que les événements $A_1 \cup A_2, B, C$ sont globalement indépendants.
7. Pour deux événements E et F, on note
$$E \Delta F = (E \cap F^c) \cup (E^c \cap F) = (E \cup F) \setminus (E \cap F).$$
   On suppose que A et B sont des événements indépendants, ayant tous deux une probabilité de p.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(A \Delta B)$ en fonction de p.
   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les événements $A, B, A \Delta B$ soient globalement indépendants.