Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique

Licence 2ème année
Probabilités S3
5 décembre 2024

Contrôle continu N°2

Tous les documents sont interdits, la calculatrice et le téléphone portable sont interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 90 minutes

Attention, le sujet est recto-verso

Exercice 1 : vérification de l'assiduité

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{1+X}\right].$$

Exercice 2

Pour $n \geqslant 1$ donné, soit (X_n, Y_n) un couple de variables aléatoires tel que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \alpha_n 2^{n \cdot \min\{i,j\}}, \quad i, j \in \{1; 2; 3\}. \tag{1}$$

1. Déterminer α_n pour que l'égalité (1) définisse bien la loi d'un couple.
2. Déterminer les lois marginales de X_n et de Y_n.
3. Déterminer si les variables aléatoires X_n et Y_n sont indépendantes.
4. Examiner la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.
5. Examiner la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1. Rappeler la définition de la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
2. Donner sans démonstration la valeur de $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k/k!$ ainsi que celle de $\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$.
3. Calculer les fonctions génératrices de X, Y et $X + Y$.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et $X + Y$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$, $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

1. Pour $\ell \in \mathbb{N}$ donné, déterminer tous les entiers j tels que $\lfloor j/2 \rfloor = \ell$.
2. Déterminer la loi de $\lfloor X/2 \rfloor$.
3. Plus généralement, déterminer pour $d \in \mathbb{N}^*$ donné, la loi de $\lfloor X/d \rfloor$.

Exercice 5

Soit $(X_i)_{i=1}^{2n}$ une collection de variable aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soient $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{2n} X_i$.

1. Déterminer la loi de X, celle de Y ainsi que celle de $Y - X$.
2. Exprimer pour $k, \ell \in \mathbb{N}$ pour lequelles cela a du sens la quantité $\mathbb{P}(X = k \mid Y = \ell)$, à l'aide de coefficients binomiaux et éventuellement de p.