Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique

Licence 2ème année
Probabilités S3
7 novembre 2025

Contrôle continu N°1

Tous les documents sont interdits, la calculatrice et le téléphone portable sont interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 90 minutes

Attention, le sujet est recto-verso

Exercice 1

1. Donner la définition de l'indépendance globale entre trois événements A, B et C d'un espace probabilisé.
2. Soient E_1 et E_2 des événements disjoints de Ω. Donner l'expression de $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2)$ à l'aide de $\mathbb{P}(E_1)$ et de $\mathbb{P}(E_2)$.
3. Soient A, B et C trois événements globalement indépendants. En utilisant uniquement le résultat de la question 2, démontrer que A, B et C^c sont également globalement indépendants.

Exercice 2

Une urne contient k_1 boules blanches et k_2 boules noires avec $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$. On tire une boule, puis on remet la boule tirée et on rajoute une boule de la couleur tirée dans l'urne. On considère les événements

- B_i : "une boule blanche a été tirée au i-ème tirage", $i \in \{1, 2\}$,
- N_i : "une boule noire a été tirée au i-ème tirage", $i \in \{1, 2\}$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(N_1)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(B_2 \mid B_1)$ et $\mathbb{P}(B_2 \mid N_1)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(B_2)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(N_1 \mid B_2)$.

Exercice 3

Soit X variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

1. Rappeler l'expression de $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \in \{0, \ldots, n\}$.

2. Calculer $\mathbb{E}[X(X-1)]$. On pourra compléter la formule $k(k-1)C_n^k = n(n-1)a_{n,k}$ avec $a_{n,k}$ à déterminer.
3. Calculer $\mathbb{E}[X(X-1)(X-2)]$. On pourra compléter la formule

$$k(k-1)(k-2)C_n^k = n(n-1)(n-2)b_{n,k}$$

avec $b_{n,k}$ à déterminer.

4. En déduire $\mathbb{E}[X^3]$.

Exercice 4

Un atelier comporte trois machines M_1, M_2 et M_3. La machine M_1 a une probabilité de défaillance de p, la machine M_2 a une probabilité de défaillance de $2p$ et la machine M_3 a une probabilité de défaillance de $3p$, avec $0 < p < 1/3$. L'événement de défaillance la machine i est noté A_i et on suppose A_1, A_2, A_3 globalement indépendants.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de machines défaillantes. Tous les résultats devront être exprimés sous la forme d'un polynôme de variable p représenté sous la forme $a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Soit D l'événement "l'une des machines est défaillante", autrement dit $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Calculer $\mathbb{P}(A_1 \mid D)$.