Université de Strasbourg
UFR de Mathématiques
et d'Informatique

Licence 2ème année
Probabilités S3
1er décembre 2025

Contrôle continu N°2

Tous les documents sont interdits, la calculatrice et le téléphone portable sont interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 90 minutes

Attention, le sujet est recto-verso

Exercice 1

Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires dont la loi jointe est donnée par

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \alpha(i + 2j), \quad i, j \in \{1, 2\}. \tag{1}$$

1. Représenter sous forme de tableau la loi jointe.
2. Déterminer la valeur de la constante α pour que l'égalité (1) définisse une loi de probabilité.
3. Déterminer les lois marginales de X et de Y. On exprimera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
4. Déterminer pour chaque $j \in \{1, 2\}$, la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{Y = j\}$. On exprimera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
5. Déterminer si X et Y sont indépendantes.
6. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. Le résultat sera exprimé sous la forme $\frac{a}{b\sqrt{c}}$, où a, b et c sont des entiers.

Exercice 2

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, où pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i \in]0, 1[$. On pose $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. Calculer la fonction génératrice de S_n.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p_1, \ldots, p_n)$ pour que S_n soit de loi binomiale (et montrer que cette condition est la bonne).

Exercice 3

Pour $n \geqslant 1$, soient $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. On pose

$$Y_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_{n,i}.$$

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n \geqslant 1}$.
3. Soit $Z_n := \sum_{i=1}^{n} X_{n,i}$. Quelle est la loi de Z_n ?
4. Étudier la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire ayant pour fonction génératrice

$$G_X(s) = A\left(1 + s^n\right)^3. \tag{2}$$

1. Déterminer A pour que l'égalité (2) définisse bien une fonction génératrice. Si vous n'arrivez pas à calculer la constante A, vous pouvez continuer l'exercice en exprimant toutes les quantités demandées en fonction de A.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.