

Résumé du cours Probabilités 1 S3
Université de Strasbourg
L2 Mathématiques / Mathématiques et Physique
Approfondies

Davide Giraudo

11 septembre 2026

1 Espaces probabilisés

1.1 Terminologie

On considère le lancer d'un dé à six faces.

- Un résultat possible est appelé une réalisation ; il est noté ω .
- L'ensemble de tous les résultats possibles est appelé espace d'états et est notée Ω . Ici : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Un événement est une collection de résultats. Par exemple, si A est l'événement "le résultat du lancer est pair", $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$.
- L'événement contraire de A est noté A^c ; dans l'exemple précédent,

$$A^c = \Omega \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5\}.$$

Événements particuliers

- L'événement certain : Ω .
- L'événement impossible : $\emptyset$.
- L'événement A et B : $A \cap B$.
- L'événement A ou B ("ou" non exclusif) : $A \cup B$.

Définition 1.1. *Les événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.*

1.2 Ensembles

Définition 1.2 (Ensemble fini). *Un ensemble Ω est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de Ω dans $\{1, \dots, n\}$. On dit alors que $\text{card}(\Omega) = n$.*

Définition 1.3 (Ensemble dénombrable). *On dit que Ω est dénombrable s'il existe une bijection de Ω dans $\mathbb{N}$.*

Définition 1.4 (Ensemble au plus dénombrable). *Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Exemples 1.1. • $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

- L'intervalle $[0, 1]$ n'est pas dénombrable.

Dans la suite, on suppose Ω au plus dénombrable et on pose $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$.

Définition 1.5 (Partition). *On dit que $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de A si pour tous $i, i' \in I$ tels que $i \neq i'$, $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.*

Proposition 1.6. *Soient Ω un ensemble, I un ensemble d'indices, $(A_i)_{i \in I}$ une collection de sous-ensembles de Ω et $B \subset \Omega$. Alors*

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$
$$B \cap \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B \cap A_i), \quad B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

1.3 Probabilités

Définition 1.7 (Probabilité). *Une probabilité $\mathbb{P}$ est une fonction définie sur une tribu $\mathcal{F}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et
2. si $(A_i)_{i \in I}$ est une collection au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints ($A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ si $i \neq i'$), alors

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i). \quad (\sigma\text{-additivité})$$

Définition 1.8 (Espaces probabilisés). *Soient Ω un ensemble, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ une probabilité. Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.*

Définition 1.9. *Un événement $A \in \mathcal{F}$ est :*

- presque sûr si $\mathbb{P}(A) = 1$;
- négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$.

Proposition 1.10 (Propriétés des mesures de probabilité). 1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$;

2. Si $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;

3. monotonie : si $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;

4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$;

5. soit $(A_i)_{i \in I}$ une collection au plus dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints et telle que $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$. Alors pour $B \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B).$$

1.4 Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable

Lemme 1.11. Pour tout $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Définition 1.12. Si Ω fini et pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/\text{card}(\Omega)$, alors on dit que $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

Par le Lemme 1.11, si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme, alors pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

1.5 Dénombrement

Définition 1.13 (Permutations). Le nombre de permutations de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ (nombre de bijections d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de n éléments) est

$$n! = \prod_{k=1}^n k = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1,$$

avec la convention $0! = 1$.

Définition 1.14 (Arrangements). Le nombre d'arrangements de k objets parmi n avec $k \leq n$ est noté A_n^k . Il correspond au nombre d'injections de $\{1, \dots, k\}$ dans $\{1, \dots, n\}$:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Définition 1.15 (Coefficient binomial). Le nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments, $0 \leq k \leq n$, est le coefficient binomial

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

1.6 Probabilités conditionnelles

Définition 1.16 (Probabilités conditionnelles). Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B , notée $\mathbb{P}(A | B)$, est définie par

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si A et B sont deux événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$ alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B)$$

Proposition 1.17. Si A et B sont deux événements tels que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ alors on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | B^c) \mathbb{P}(B^c)$$

et la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A | B^c) \mathbb{P}(B^c)}.$$

1.7 Indépendance

Définition 1.18 (Indépendance de deux événements). On dit que deux événements A et B sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B).$$

Remarque 1.19. Si A et B sont indépendants et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Définition 1.20. On dit qu'une collection au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est indépendante si pour tout sous-ensemble fini J de I ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Remarque 1.21. Si $(A_i)_{i \in I}$ est indépendante et $I' \subset I$, alors $(A_i)_{i \in I'}$ est indépendante.

2 Variables aléatoires discrètes

2.1 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.1 (Variable aléatoire). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé où Ω est au plus dénombrable. Une variable aléatoire discrète X est une application $X : \Omega \rightarrow E$ où E est au plus dénombrable.

Définition 2.2 (Loi d'une variable aléatoire). Pour tout $A \subset E$, on note

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\})$$

L'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1]$ est une probabilité sur E et est appelée loi de la variable aléatoire X .

- Si $E = \{x_1, \dots, x_N\}$ est fini, soit $p_k = \mathbb{P}(X = x_k) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_k\})$.
- Si E est dénombrable, soit $\tau: E \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection, $x_k = \tau^{-1}(k)$ et $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ (si $E = \mathbb{N}$, on a simplement $p_k = \mathbb{P}(X = k)$).

On a

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{k: k \in A} p_k.$$

2.2 Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.3 (Espérance). Soient $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble au plus dénombrable et $X: \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète. Si

$$\sum_{x \in E} |x| \mathbb{P}(X = x) < \infty,$$

on dit que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre un et on pose

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \mathbb{P}(X = x).$$

La quantité $\mathbb{E}[X]$ est appelée espérance de X .

Définition 2.4. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ si X^n admet un moment d'ordre 1.

Remarque 2.5. Si X est bornée, au sens où il existe une constante C telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leq C$, alors X admet un moment d'ordre n pour chaque n .

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_N$, alors

$$\mathbb{E}[X^n] = \sum_{k=1}^N x_k^n \mathbb{P}(X = x_k).$$

Proposition 2.6. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles ayant un moment d'ordre un fini. L'espérance vérifie les propriétés suivantes :

- *linéarité* : si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha X + \beta Y$ admet un moment d'ordre un et

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y].$$

- *Positivité* : si X est positive presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$, alors $\mathbb{E}[X] \geq 0$.
- *Croissance* : si $X \leq Y$ presque sûrement, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Proposition 2.7 (Inégalités sur l'espérance).

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{1}{a} \mathbb{E}[|X|]. \quad (\text{Markov})$$

$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{1}{a^2} \mathbb{E}[X^2]. \quad (\text{Tchebychev})$$

Soit $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et X une variable aléatoire telle que X et $\phi(X)$ admettent un moment d'ordre un. Alors

$$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]. \quad (\text{Jensen})$$

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[Y^2]}. \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

2.3 Variance d'une variable aléatoire

Définition 2.8 (Variance). Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre deux fini. La variance de X , notée $\text{Var}(X)$, est définie par

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Définition 2.9 (Écart-type). L'écart-type de X , noté σ_X , est défini par

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Remarquons que $\sigma_{cX} = |c| \sigma_X$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ car $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$.

Soit X une variable aléatoire discrète réelle, prenant ses valeurs dans un ensemble E au plus dénombrable. Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\sum_{x \in E} |g(x)| \mathbb{P}(X = x) < \infty.$$

La variable aléatoire $g \circ X =: g(X)$, définie par $g \circ X(\omega) = g(X(\omega))$, admet un moment d'ordre 1 et

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in E} g(x) \mathbb{P}(X = x).$$

2.4 Exemple de lois discrètes

Définition 2.10. On dit qu'une variable aléatoire X est constante s'il existe un réel c tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

S'il existe un réel c tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$, alors $\mathbb{E}[X] = c$ et $\text{Var}(X) = 0$.

Définition 2.11. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On a alors

$$\mathbb{E}[X] = p; \quad \text{Var}(X) = p(1 - p).$$

Définition 2.12. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

On a

$$\mathbb{E}[X] = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p).$$

Définition 2.13. On dit que X suit une loi uniforme discrète de paramètre $N \in \mathbb{N}^*$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

On a $\mathbb{E}[X] = (N+1)/2$ et $\text{Var}(X) = (N^2-1)/12$.

Définition 2.14. On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p.$$

On a

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Définition 2.15. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in]0, \infty[$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On a $\mathbb{E}[X] = \text{Var}(X) = \lambda$.

2.5 Fonction génératrice d'une v.a. à valeurs entières positives

Définition 2.16. La fonction génératrice d'une variable aléatoire $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction $G_X: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$G_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \mathbb{P}(X = n), \quad 0 < s \leq 1, \quad G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0).$$

Proposition 2.17. Pour $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!},$$

où $G_X^{(0)} = G_X$ et pour $n \geq 1$, $G_X^{(n)} = \left(G_X^{(n-1)}\right)'$.

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1),$$

$$\text{Var}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2.$$

Loi de Bernoulli de paramètre p	$G_X(s) = 1 - p + ps$
Loi binomiale de paramètres (n, p)	$G_X(s) = (1 - p + ps)^n$
Loi géométrique de paramètre p	$G_X(s) = \frac{ps}{1 - (1-p)s}$
Loi de Poisson de paramètre λ	$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

2.6 Loi conditionnelle et espérance conditionnelle

Définition 2.18 (Loi conditionnelle). Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs respectives dans les ensembles E et F . On dit que X et Y sont indépendantes si

$$\forall x \in E, y \in F, \quad \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

Définition 2.19. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs respectives dans les ensembles E et F . La loi conditionnelle de Y sachant X est la donnée de

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x), x \in E, y \in F.$$

Remarque 2.20. Si X est indépendante de Y , alors la loi conditionnelle de Y sachant X est simplement la loi de Y .

Définition 2.21 (Indépendance d'une collection de variables aléatoires discrètes). Soient $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires discrètes où X_i prend ses valeurs dans l'ensemble E_i . La suite $(X_i, 1 \leq i \leq n)$ est indépendante si pour tous $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$\mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap \dots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Proposition 2.22. Soit $(X_i, 1 \leq i \leq n)$ une suite indépendante de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p . Alors $\sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

Définition 2.23. La loi conditionnelle de X sachant un événement E de probabilité non nulle est la donnée des couples $(x_i, \mathbb{P}(X = x_i \mid E))_{i \in I}$, où $(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des valeurs prises par X .

2.7 Couples de variables aléatoires discrètes

Définition 2.24 (Concept de couples de variables aléatoires). Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X: \Omega \rightarrow I, Y: \Omega \rightarrow J$ des variables aléatoires, où $I, J \subset \mathbb{R}$. Le couple de variables aléatoires (X, Y) est la variable aléatoire $(X, Y): \Omega \rightarrow I \times J$ définie par

$$(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)).$$

Définition 2.25 (Loi jointe d'un couple de variables aléatoires). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. La loi jointe de (X, Y) est la donnée de

$$\{(x_i, y_j, p_{i,j})\}_{i \in I, j \in J},$$

où

- $\{(x_i, y_j)\}_{i \in I, j \in J}$ sont les valeurs prises par le couple (X, Y) ,

- $\{(p_{i,j})\}_{i \in I, j \in J}$ sont les probabilités correspondantes :

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), i \in I, j \in J.$$

Remarque 2.26. On doit avoir $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{i,j} = 1$ et $p_{i,j} \geq 0$.

Exemple 2.27. On peut représenter la loi jointe dans un tableau.

$y_j \backslash x_i$	0	2	4
1	1/8	0	1/8
2	1/16	1/16	1/16
8	1/16	1/4	1/4

Définition 2.28. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. Les lois marginales de X et Y sont les lois des variables aléatoires réelles X et Y . Si (X, Y) a pour loi jointe $\{(x_i, y_j, p_{i,j})\}_{i \in I, j \in J}$, alors

- la loi de X est donnée par $\{(x_i, p_{i,\bullet})\}_{i \in I}$, où

$$p_{i,\bullet} = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{i,j}.$$

- la loi de Y est donnée par $\{(y_j, p_{\bullet,j})\}_{j \in J}$, où

$$p_{\bullet,j} = \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{i,j}.$$

Proposition 2.29 (Espérance d'une fonction d'un couple). Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes prenant ses valeurs dans $\{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et $Z = g(X, Y)$. Alors Z est une variable aléatoire discrète, prenant ses valeurs dans $\{g(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$.

En particulier, si X est indépendante de Y , alors

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y], \quad \forall s \in [0, 1], G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s).$$

Définition 2.30 (Covariance). Soient X et Y deux variables aléatoire discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que X et Y admettent un moment fini d'ordre deux. La covariance de X et Y , notée $\text{Cov}(X, Y)$, est définie par

$$\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

On a également

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y].$$

Proposition 2.31. *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de carré intégrable, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.*

Proposition 2.32. *Soient X , Y et Z trois variables aléatoires discrètes de carré intégrable et $a, b \in \mathbb{R}$. On a :*

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$;
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$;
- $\text{Cov}(aX + bY, Z) = a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z)$;
- $\text{Cov}(X, a) = 0$.

Proposition 2.33 (Covariance et variance). *Si X et Y sont deux variables aléatoires de carré intégrable, alors*

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

Si de plus X et Y sont indépendantes, alors

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y).$$

Définition 2.34 (Coefficient de corrélation linéaire). *Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable. Le coefficient de corrélation linéaire, noté $\rho(X, Y)$, est défini par*

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}.$$

Proposition 2.35. *Si X et Y sont indépendantes, alors $\rho(X, Y) = 0$.*

Proposition 2.36. *Pour toutes variables aléatoires X et Y non constantes,*

$$-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1.$$

Proposition 2.37. *Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable. On a*

1. $\rho(X, Y) = 1$ si et seulement si il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $X = aY + b$.
2. $\rho(X, Y) = -1$ si et seulement si il existe $a < 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $X = aY + b$.

3 Convergence et théorèmes en probabilité

Définition 3.1. *On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X si pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Définition 3.2. *On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ vers une variable aléatoire X si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

Proposition 3.3. Si $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en moyenne d'ordre p pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$ vers une variable aléatoire X , alors $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers X .

Définition 3.4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X si pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

Proposition 3.5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui converge en probabilité vers une variable aléatoire X . Alors $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X .

Théorème 3.6 (Loi faible des grands nombres). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires de même loi. Soit $\overline{X}_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ la moyenne empirique. On suppose que X_1 admet un moment fini d'ordre deux. Alors $(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1])_{n \geq 1}$ converge en moyenne d'ordre deux vers 0. En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]| > \varepsilon) = 0.$$

Théorème 3.7 (Théorème limite central (TLC)). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires de même loi. Soit $\overline{X}_n := \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ la moyenne empirique et $\sigma^2 = \text{Var}(X_1) > 0$. Alors pour tout réel t ,

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]) \leq t\sigma) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds.$$

Définition 3.8. Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition de X , notée F , est définie par

$$F(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}.$$