Un contre-exemple strictement stationnaire mélangeant au théorème central limite en dimension infinie

En collaboration avec Dalibor Volný

Davide Giraudo

Université de Rouen

14 octobre 2013

Plan

Plan

Suites stationnaires, définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé.

Définition

La suite $(X_j, j \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}$ est strictement stationnaire si pour tout entier n, les suites $(X_{j+n}, j \in \mathbb{Z})$ et $(X_j, j \in \mathbb{Z})$ ont la même loi.

Cette condition est équivalente à :

pour tout $d \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{R}$,

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{d} \{X_j < t_j\}\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{d} \{X_{j+n} < t_j\}\right).$$

Suite stationnaires, représentation

Soit $T : \Omega \to \Omega$ bijective, bi-mesurable, et préservant la mesure : $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors la suite $\left(f \circ T^j, j \in \mathbb{Z}\right)$ est strictement stationnaire.

Réciproquement, toute suite strictement stationnaire peut-être représentée de cette manière, *i.e.* $(f \circ T^i, i \in \mathbb{Z})$ a la même loi que $(X_i, i \in \mathbb{Z})$ pour un certain T et un certain f.

On appelle le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique.

On note pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $U(f)(\omega) := f(T(\omega))$.

Convergence en loi

Soit $(y_n, n \geqslant 1)$ une suite de mesures boréliennes sur l'espace métrique (S, d). On dit que $\mu_n \to X$ en loi si $\mathbb{E}_{\mu_n}[f] \to \mathbb{E}_{\mu}[f]$ pour toute fonction $f : (S, d) \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

La suite $(\mu_n, n \geqslant 1)$ est tendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de (S, d) tel que pour chaque n, $\mu_n(K) > 1 - \varepsilon$.

De manière analogue, on parle de convergence en loi et de tension de variabless aléatoires si ceci a lieu pour les lois de ces variables aléatoires.

Théorème (Prokhorov)

Si la suite $(X_n, n \geqslant 1)$ est tendue, alors il existe une sous-suite qui converge en loi.
Si (S, d) est séparable et complet, et que l'on peut extraire de toute sous-suite de $(X_n, n \geqslant 1)$ une sous-suite convergente en loi, alors $(X_n, n \geqslant 1)$ est tendue.

Remarque

Dans le cas où (S, d) est séparable et complet, la convergence en loi est métrisable. Une suite tendue est relativement compacte pour cette métrique, et réciproquement.

Le théorème central limite (TCL)

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ à moyenne nulle, $S_n(f) := \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ et $\sigma_n(f)^2 := \mathbb{E}(S_n(f)^2)$.

Définition

On dit que $\left(f \circ T^j, j \in \mathbb{Z}\right)$ vérifie le théorème central limite si la suite $\left(\frac{1}{\sigma_n(f)} S_n(f), n \geqslant 1\right)$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite, i.e. pour toute fonction $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[h\left(\frac{1}{\sigma_n(f)} S_n(f)\right)\right] = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x.$$

On a une définition analogue pour les suites à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$ (avec une loi limite gaussienne, de moyenne nulle et de covariance la matrice identité).

Le théorème central limite a lieu si $(f \circ T^j, j \in \mathbb{Z})$ est indépendante. Il faut apporter des réponses dans le cas dépendant.

Les conditions de mélange [Bra07]

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$. On introduit

$$\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \sup_{A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}} |\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)|\,;$$

$$\beta(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \frac{1}{2}\sup\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}|\mu(A_i\cap B_j)-\mu(A_i)\mu(B_j)|\,;$$

où $A_i\in\mathcal{A}$, $B_j\in\mathcal{B}$, et $\{A_i, 1\leqslant i\leqslant I\}$, $\{B_j, 1\leqslant j\leqslant J\}$ forment une partition de Ω, et

$$\rho(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \sup\left\{|\mathrm{Corr}(f,g)|\,, f\in L^2(\mathcal{A}), g\in L^2(\mathcal{B}), f,g\neq 0\right\},$$

où $\mathrm{Corr}(f,g) := \frac{E(fg)-E(f)E(g)}{\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}}$.

Si $-\infty\leqslant m\leqslant n\leqslant +\infty$ et $X := (X_j, j\in\mathbb{Z})$ est une suite de variables aléatoires, on pose $\mathcal{F}_m^n := \sigma(X_j, m\leqslant j\leqslant n)$.

Suite mélangeante

On dit que $X := (X_j, j \in \mathbb{Z})$ est α-mélangeante si

$$\alpha(n) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^{m}, \mathcal{F}_{m+n}^{+\infty}) \to 0, n \to +\infty.$$

Dans le cas stationnaire, $c(n) = c(\mathcal{F}_{-\infty}^{0}, \mathcal{F}_{n}^{\infty})$ (avec $c = \alpha, \beta$ ou ρ). On a

$$0 \leqslant \alpha(n) \leqslant 2\beta(n) \quad \text{et} \quad \alpha(n) \leqslant \rho(n).$$

Il n'y a pas de relation similaire entre les coefficients de β et ρ-mélange.

Si X est indépendante, alors $\rho(n) = \beta(n) = 0$ pour tout n.

Théorème central limite sous des conditions de mélange

Théorème (Herrndorff, 1983)

Étant donnée une suite décroissante $(c_k, k \geqslant 1)$ *de nombres réels (strictement) positifs, il existe une suite* $(X_k, k \in \mathbb{Z})$ *strictement stationnaire, à moyenne nulle,* $\sigma_n^2 := \operatorname{Var} S_n \to +\infty$, *vérifiant*

- *la suite* $(S_n, n \geqslant 1)$ *est uniformément tendue ;*
- $\inf_{n \geqslant 1} \mu(S_n = 0) > 0$ *(donc pas de TCL) ;*
- $\sigma_n^2 = n$ *pour tout* n *;*
- *pour tout entier* n, $\beta_X(n) \leqslant c_n$.

Soit d un entier naturel non nul.

Théorème (Denker (1986), Volný (1988))

Soit $X = (X_k, k \in \mathbb{Z})$ une suite stationnaire α- mélangeante à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, avec $\sigma_n^2 := \mathrm{Var}\, S_n \to +\infty$, $\mathbb{E}(X_0) = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. *on a $\frac{S_n}{\sigma_n} \Rightarrow N(0, \Gamma)$;*
2. *la famille $\left\{ \frac{\|S_n\|^2}{\sigma_n^2}, n \geqslant 1 \right\}$ est uniformément intégrable.*

Remarque

Denker a établi ce résultat pour $d = 1$ avec un argument « de blocs », Volný pour d quelconque par approximation par un tableau i.i.d.

Plan

Quelques définitions et notations [LT91]

On considère un espace de Banach réel séparable B muni de sa tribu borélienne, B' son dual topologique.

Définition

Une variable aléatoire $X : \Omega \to B$ est gaussienne si pour tout $f \in B'$, $f(X)$ est une variable aléatoire gaussienne.

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert réel des suites de carré sommable. On le munit du produit scalaire canonique

$$\langle u, v \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} u_j v_j,$$

et par $e^{(j)}$ l'élément de $\mathcal{H}$ dont l'unique terme non nul est en position j et vaut 1·

Définitions (suite)

On peut définir, pour $f, g \in B'$ et X une variable aléatoire à valeurs dans B vérifiant $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ l'opérateur de covariance

$$\mathrm{Cov}_X(f, g) := \mathbb{E}[f(X)g(X)].$$

Si $X \colon \Omega \to \mathcal{H}$ est gaussienne à moyenne nulle, alors Cov_X détermine de manière unique la loi de X.

En effet, les mesures sont déterminées par leurs valeurs sur les ensembles cylindriques

$$C := \{(x_j) \in \mathcal{H}, (x_1, \ldots, x_n) \in B\}\,, n \geqslant 1, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Problèmes qui peuvent apparaître

Soit B un espace de Banach séparable, B' son dual topologique.

- Les fonctions caractéristiques caractérisent la loi, au sens où si pour chaque $f \in B'$, on a
$$\widehat{\mu}(f) := \int \exp\left(i\langle f, x\rangle_{B',B}\right) \mathrm{d}\mu = \int \exp\left(i\langle f, x\rangle_{B',B}\right) \mathrm{d}\nu, .$$
alors $\mu = \nu$.

- Mais le fait que $\widehat{\mu_n}(f) \to \widehat{\mu}(f)$ pour chaque $f \in B'$ ne garantit pas la convergence en loi, ni même la tension (prendre $B := \ell^2$ et $\mu_n := \delta_{e^{(n)}}$).

- La tension est plus difficile à obtenir : la suite $(X_n, n \geqslant 1)$ de v.a. à valeurs dans B est tendue si pour $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ et $F \subset B$ un sous-espace de dimension finie tels que pour tout n, $\mu\left\{\|X_n\| > R\right\} < \varepsilon$ et $\mu\left\{d(X_n, F) > \varepsilon\right\} < \varepsilon$.

Justification de la restriction aux Hilbert séparables

- La séparabilité permet d'éviter des problèmes de mesurabilité.
- On dit que $X : \Omega \to B$ vérifie le théorème central limite si pour toute suite i.i.d. $(\xi_i, i \geqslant 1)$ où ξ_1 a la même loi que X, la suite $\left(n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \xi_j, n \geqslant 1\right)$ converge en loi dans B vers une variable aléatoire gaussienne.

Proposition

Dans $\mathcal{H}$, les conditions $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}\,\|X\|^2 < \infty$ sont nécessaires et suffisantes pour garantir un théorème central limite.

Réciproquement, si B est un espace de Banach séparable pour lequel les deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour le TCL, alors B est isomorphe à un espace de Hilbert.

Résultats existants

Théorème (Politis, Romano (1994))

Si $(X_j, j \geqslant 1)$ *est une suite strictement stationnaire, à moyenne nulle, à valeurs dans* $\mathcal{H}$ *telle que* $\mathbb{E}\,\|X_1\|^{2+\delta} < \infty$ *pour un* $\delta > 0$ *et* $\sum_j \alpha_X(j)^{\frac{\delta}{2+\delta}}$ *converge, alors la suite* $\left(n^{-1/2}\sum_{j=1}^n X_j, n \geqslant 1\right)$ *converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne* $\mathcal{N}$*, dont l'opérateur de covariance* S *vérifie*

$$\langle Sh, h\rangle = \mathrm{Var}(\langle X_1, h\rangle) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Cov}(\langle X_1, h\rangle\langle X_{1+i}, h\rangle), \quad h \in \mathcal{H}.$$

Si $\|X_1\| \in L^\infty$*, alors il suffit que* $\sum_j \alpha_X(j)$ *soit convergente pour garantir le résultat.*

Lien entre moments et taux de mélange

Notations

Si X est un variable aléatoire réelle, on note Q_X l'inverse càdlàg de $t \mapsto \mu\{|X| > t\}$, *i.e.*, $Q_X(u) := \inf\{t \in \mathbb{R}, \mu\{|X| > t\} \leqslant u\}$. Si $\alpha_n \to 0$, on désigne par $\alpha^{-1}(u)$ le nombre d'indices k tels que $\alpha(k) \leqslant u$.

Théorème (Merlevède, Peligrad, Utev (1997),[MPU97])

Si $(X_j, j \in \mathbb{Z})$ est une suite strictement stationnaire de variables aléatoires à moyenne nulle et vérifiant

$$\int_0^1 \alpha^{-1}(u) Q^2_{\|X_0\|}(u) \mathrm{d}u < \infty,$$

alors $n^{-1/2} \sum_{j=1}^n X_j \to \mathcal{N}$, une v.a. gaussienne d'opérateur de covariance $T = (\sigma_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ donné par

$$\sigma_{i,j} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n \langle X_k, e_i \rangle_{\mathcal{H}} \cdot \langle X_k, e_j \rangle_{\mathcal{H}} \right).$$

Comparaison des deux théorèmes

- Si $\|X_1\| \in L^\infty$, on a la même restriction sur les coefficients de mélange.
- Si $\|X_1\|$ a un moment fini d'ordre $2+\delta$, $\delta > 0$, la condition MPU est vérifiée dès que $\sum_{i\geqslant 1}(i+1)^{\frac{2}{\delta}}\alpha_i$ est finie. Lorsque $\alpha_k \sim k^{-\frac{2+\delta}{\delta}}(\log k)^{-\theta}$, la condition MPU est vérifiée si $\theta > 1$ alors que celle de Romano et Politis ne l'est que si $\theta > \frac{2+\delta}{\delta}$.
- Le résultat de Merlèvède, Peligrad et Utev est exploitable lorsque $\|X_1\|$ se trouve dans un espace de type Orlicz associé à la fonction de Young ϕ. La condition se traduit par

$$\text{il existe } c > 0 \text{ tel que } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi'^{-1}\left(\frac{i+1}{c}\right) < \infty,$$

où ϕ'^{-1} est la fonction inverse continue à gauche de la dérivée de ϕ.

Autre résultat sous une condition de $\rho'-$mélange

On pose

$$\rho'_X(n) := \sup\left\{\rho(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_J), d(I,J) \geqslant n\right\},$$

avec $\mathcal{F}_I := \sigma(X_i, i \in I)$ et $d(I,J) := \inf\left\{|i-j|, i \in I, j \in J\right\}$.

Théorème (Tone (2011),[Ton11])

Soit $(X_k, k \geqslant 0)$ une suite strictement stationnaire à valeurs dans $\mathcal{H}$, à moyenne nulle, $\mathbb{E}\|X_0\|^2 < \infty$, $X_{k,i} := \langle X_k, e^{(i)}\rangle$. On suppose que $\rho'_X(n) \to 0$. On a pour chaque $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\gamma(i,j) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{L}(X_{l,i} - X_{l,j})\right)^2 \text{ existe dans } [0,\infty[, \text{ et}$$

$L^{-1/2}\sum_{j=1}^{L} X_j \to \mathcal{N}(0,\Sigma)$, où $\Sigma = (\sigma_{i,j}, i,j \geqslant 0)$ est l'opérateur de covariance, avec

$$\sigma_{i,i} = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L}\cdot\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{L} X_{l,i}\right)^2,$$

et pour $i \neq j$,

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{2}(\sigma_{ii} + \sigma_{jj} - \gamma(i,j)).$$

Résultat principal

Théorème (G., Volný,[GVa])

Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *tel que étant donné* $0 < q < 1$*, on peut construire une suite strictement stationnaire* $(X_k = f \circ T^k, k \in \mathbb{N})$ *sur* Ω*, à valeurs dans* $\mathcal{H}$*, telle que :*

1. $\mathbb{E}[X_0] = 0$, $\mathbb{E}[\|X_0\|^p]$ *est finie pour chaque* $p < \infty$ *;*
2. *on a* $\sigma_N^2(X) = \mathbb{E}[\|S_N\|^2] \to \infty$ *;*
3. *la suite* $(X_k, k \in \mathbb{Z})$ *est* β*-mélangeante, avec* $\beta_X(j) = O\left(\frac{1}{j^q}\right)$ *;*
4. *la famille* $\left\{\frac{\|S_N(f)\|^2}{\sigma_N^2(f)}, N \geqslant 1\right\}$ *est uniformément intégrable ;*
5. *pour tout* $I \subset \mathbb{N}$ *infini, la famille* $\left\{\frac{S_N(f)}{\sigma_N(f)}, N \in I\right\}$ *n'est pas tendue. De plus, si* $(c_N, N \geqslant 1)$ *est une suite qui tend vers l'infini, on a :*
   - *soit* $\lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_N}{c_N} = 0$*, et dans ce cas* $\frac{S_N(f)}{c_N} \to \mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ *en loi,*
   - *soit* $\limsup_{N\to\infty} \frac{\sigma_N}{c_N} > 0$*, auquel cas* $\left(\frac{S_N(f)}{c_N}, N \geqslant 1\right)$ *n'est pas tendue.*

Plan

Construction du système dynamique

Lemme

Soit $(u_k, k \geqslant 1)$ *une suite de nombres dans* $(0,1)$. *Alors il existe un système dynamique* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ *et une suite de variables aléatoires* $(\xi_k, k \geqslant 1)$ *telles que :*

1. *pour tout* $k \geqslant 1$, $\mu(\xi_k = 1) = \mu(\xi_k = -1) = \frac{u_k}{2}$, $\mu(\xi_k = 0) = 1 - u_k$;
2. *les variables aléatoires* $(U^i \xi_k, k \geqslant 1, i \in \mathbb{Z})$ *sont mutuellement indépendantes.*

Idée de démonstration : on pose $\Omega := [0,1]^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}}$ muni de la tribu borélienne produit et la mesure de Lebesgue produit. Pour $(k,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ et $S \subset [0,1]$, on définit $P_{k,j}(S) := \prod_{(i_1,i_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}} S_{i_1,i_2}$, où $S_{i_1,i_2} = S$ si $(i_1, i_2) = (k,j)$ et $[0,1]$ sinon. Puis on pose

$$A^+_{k,j} := P_{k,j}([0, 2^{-1} u_k]),$$

$$A^-_{k,j} := P_{k,j}([2^{-1} u_k, u_k]),$$

l'application T est définie par $T((x_{k,j}, (k,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z})) := (x_{k,j+1}, (k,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z})$ et $\xi_k := \chi_{A^+_{k,0}} - \chi_{A^-_{k,0}}$.

Construction de f

Soit $(n_k, k \geqslant 1)$ une suite strictement croissante d'entiers (qui sera spécifiée ultérieurement). On applique la proposition précédente avec $u_k := n_k^{-2}$.

On pose $f_k := \sum_{i=0}^{n_k-1} U^{-i}\xi_k$ et $f := \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{(k)}$. On a l'intégrabilité de $\|f\|_{\mathcal{H}}$ dès que $\sum_k \frac{1}{n_k}$ converge.

Notations

- Si $(a_n, n \geqslant 1)$ et $(b_n, n \geqslant 1)$ sont deux suites de nombres réels positifs, la notation $a_n \lesssim b_n$ signifie qu'il existe $C > 0$ telle que pour tout N, $a_n \leqslant Cb_n$.
- Si N est un entier positif, on désigne par $i(N)$ l'unique entier tel que $n_{i(N)} \leqslant n < N_{i(N)+1}$.

Expression des sommes partielles et des variances

On a

$$S_N(f_k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} j(U^{j-1-N} + U^{n_k+1-j})\xi_k + N\sum_{j=N}^{n_k-1} U^{j-N}\xi_k & \text{si } n_k \geqslant N, \\ \sum_{j=1}^{n_k} j(U^{n_k+1-j} + U^{j-1-N})\xi_k + n_k\sum_{j=n_k}^{N-1} U^{n_k-j}\xi_k & \text{si } n_k \leqslant N. \end{cases}$$

En prenant l'espérance du carré, et par indépendance,

$$\sigma_N^2(f_k) = \begin{cases} \frac{1}{n_k^2}\left(2\sum_{j=1}^{N} j^2 + N^2(n_k - N)\right) & \text{si } n_k \geqslant N, \\ \frac{1}{n_k^2}\left(2\sum_{j=1}^{n_k} j^2 + n_k^2(N - n_k)\right) & \text{si } n_k \leqslant N. \end{cases}$$

Puisque $M^3 \lesssim \sum_{j=1}^{M} j^2 \lesssim M^3$ et $\sigma_N^2(f) = \sum_{k\geqslant 1} \sigma_N^2(f_k)$, on a

$$\sigma_N^2(f) \geqslant C \cdot N \sum_{j=1}^{i(N)} 1 = C \cdot N \cdot i(N) \text{ et } \sigma_N^2(f) \geqslant CN^2 \sum_{k\geqslant i(N)+1} \frac{1}{n_k}.$$

Les taux de mélange

Proposition

Soit $p > 1$. Avec $n_k := 2^{p^k}$, on a pour tout entier l

$$\beta_X(l) \lesssim \frac{1}{l^{1/p}}.$$

Démonstration.

En procédant comme dans [GVb], on peut montrer que pour chaque k, $\beta_X(n_k) \lesssim \sum_{j \geqslant k} \frac{1}{n_j}$ (en utilisant $\beta\left(\bigvee \mathcal{A}_i, \bigvee \mathcal{B}_i\right) = \sum \beta(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i)$ si les tribus A_i sont indépendantes, de même que les $\mathcal{B}_i$). Comme

$$\sum_{j \geqslant k} \frac{1}{n_j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p^{i+k}}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{p^i p^k}} \lesssim \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^{p^k}} = \frac{2}{2^{p^k}},$$

on déduit

$$\beta_X(N) \leqslant \beta_X(n_{i(N)}) \lesssim \frac{1}{n_{i(N)}} = \frac{1}{n_{i(N)+1}^{1/p}} \leqslant \frac{1}{N^{1/p}}.$$

□

Intégrabilité uniforme

Proposition

Soit $1 < p \leqslant 2$. Supposons que pour chaque k, $n_{k+1} \geqslant n_k^p$. Alors $\mathcal{S} := \left\{ \frac{\|S_N(f)\|_{\mathcal{H}}^2}{\sigma_N^2(f)}, N \geqslant 1 \right\}$ est uniformément integrable.

Démonstration :

On montre que les familles

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ \sum_{k=1}^{i(N)-1} \frac{|S_N(f_k)|^2}{\sigma_N^2(f)}, N \geqslant 1 \right\},$$

$$\mathcal{S}_2 := \left\{ \frac{\left|S_N(f_{i(N)})\right|^2}{\sigma_N^2(f)}, N \geqslant 1 \right\},$$

$$\mathcal{S}_3 := \left\{ \frac{\left|S_N(f_{i(N)+1})\right|^2}{\sigma_N^2(f)}, N \geqslant 1 \right\}, \text{ et}$$

$$\mathcal{S}_4 := \left\{ \sum_{k \geqslant i(N)+2} \frac{|S_N(f_k)|^2}{\sigma_N^2(f)}, N \geqslant 1 \right\}$$

sont uniformément intégrables.

Intégrabilité uniforme, suite

- Pour $\mathcal{S}_1$, on obtient avec l'inégalité de Rosenthal que

$$\left\| \sum_{k=1}^{i(N)-1} \frac{|S_N(f_k)|^2}{\sigma_N^2(f)} \right\|_p \lesssim n_{i(N)}^{\frac{p-2}{p}} + 1.$$

- Pour $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_3$, on décompose f_k :

$$f_k = n_k \xi_k + (I - U) \sum_{j=1}^{n_k - 1} (n_k - j + 1) U^{-j} \xi_k =: m_k + (I - U) g_k.$$

Comme $\mathbb{E}[S_N(m_k)^2] = N$, les termes associés à $m_{i(N)}$ et $m_{i(N+1)}$ ne posent pas de problème. On a $\sigma_N^{-2}(f)\mathbb{E}[g_{i(N)}^2] \lesssim \frac{1}{i(N)}$. En écrivant $(I - U^N) g_{i(N)+1}$ comme une somme de variables aléatoires indépendantes, on obtient que $\mathbb{E}[(I - U^N) g_{i(N)+1}^2] \lesssim N$.

- Pour $\mathcal{S}_4$, on utilise encore l'inégalité de Rosenthal pour obtenir

$$\left\| \sum_{k \geqslant i(N)+2} \frac{|S_N(f_k)|^2}{\sigma_N^2(f)} \right\|_{\mathbb{L}^p} \lesssim N^2 \sum_{k \geqslant i(N)+2} \frac{1}{n_k^{1/p}}.$$

On conclut avec la condition de lacunarité.

Comportement asymptotique des sommes partielles

1. On a pour chaque d que $\frac{\langle S_N(f), e^{(d)} \rangle_{\mathcal{H}}}{\sigma_N(f)} \longrightarrow 0$ en loi, et on peut remplacer $e^{(d)}$ par un $v \in \mathcal{H}$ arbitraire. La seule loi limite possible est donc la masse de Dirac en $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$. S'il y avait convergence en loi, on aurait une suite $(Y_N := \frac{\|S_N(f)\|^2}{\sigma_N^2})$ uniformément intégrable de variables aléatoires réelles positives, d'espérance 1, et qui converge en loi vers 0.
2. On peut appliquer ce raisonnement aux sous-suites.
3. Si $\frac{\sigma_N}{c_N} \longrightarrow 0$, on a la convergence en loi de $\frac{\|S_N(f)\|}{c_N}$.
4. Dans l'autre cas, on raisonne par l'absurde. On prend $r > 0$ et $l_i \uparrow \infty$ telle que $\frac{\sigma_{l_i}}{c_{l_i}} \geqslant \frac{1}{r}$. Si la famille $\left\{ \frac{S_{l_i}(f)}{c_{l_i}} \right\}$ était tendue, on pourrait, pour chaque $\varepsilon > 0$, trouver K compact et convexe tel que $\mu \left\{ \frac{S_{l_i}(f)}{c_{l_i}} \in K \right\} > 1 - \varepsilon$. On aurait alors que $1 - \varepsilon \leqslant \mu \left\{ \frac{S_{l_i}(f)}{\sigma_{l_i}} \in rK \right\}$.

Perspectives

1. Construire un tel contre-exemple avec une variance linéaire ($\sigma_N^2(f) \sim N$).
2. Construire un tel contre-exemple avec des taux de mélange en $\frac{1}{N}$.
3. Extension aux champs aléatoires.

Bibliographie

- Richard C. Bradley, *Introduction to strong mixing conditions. Vol. 1*, Kendrick Press, Heber City, UT, 2007. MR 2325294 (2009f :60002a)
- D. Giraudo and D. Volný, *A counter example to central limit theorem in Hilbert spaces under a strong mixing condition*.
- _____, *An example of strictly stationary β-mixing process satisfying the central limit theorem but not the weak invariance principle*.
- Michel Ledoux and Michel Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 23, Springer-Verlag, Berlin, 1991, Isoperimetry and processes. MR 1102015 (93c :60001)
- Florence Merlevède, Magda Peligrad, and Sergey Utev, *Sharp conditions for the CLT of linear processes in a Hilbert space*, J. Theoret. Probab. **10** (1997), no. 3, 681–693. MR 1468399 (99e :60022)
- Cristina Tone, *Central limit theorems for Hilbert-space valued random fields satisfying a strong mixing condition*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **8** (2011), 77–94. MR 2754401 (2012c :60069)