Théorème limite central fonctionnel dans les espaces hölderiens pour des suites stationnaires faiblement dépendantes

Davide GIRAUDO

Lille, Séminaire de Probabilités et Statistique, 1er octobre 2014

Le principe d'invariance

Soit $(X_j)_{j\geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire.

On considère la fonction aléatoire S_n^{pl}, affine par morceaux et telle que $S_n^{\mathrm{pl}}(k/n) = S_k := \sum_{i=1}^k X_i$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Si $(X_j)_{j\geqslant 0}$ est i.i.d., $\mathbb{E}X_0^2 = 1$, et $\mathbb{E}X_0 = 0$, alors

$$\text{(IP)} \qquad F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}}\right) \to F(W) \text{ pour tout } F\colon C[0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue et bornée,}$$

où W est un mouvement brownien standard (Donsker, 1952).

Lorsque la convergence (IP) a lieu pour une suite strictement stationnaire $(X_j)_{j\geqslant 0}$ dans un espace fonctionnel E, on dit que $(X_j)_{j\geqslant 0}$ vérifie le principe d'invariance dans E.

Deux extensions possibles du théorème de Donsker :

- garder la stationnarité mais relâcher l'hypothèse d'indépendance;
- considérer d'autres espaces fonctionnels que $C[0,1]$.

Définition des espaces hölderiens

Pour $\alpha \in]0,1[$ l'espace de Hölder $H_\alpha[0,1]$ est l'espace des fonctions $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $\sup_{s \neq t \leqslant 1} |x(s) - x(t)| / |s-t|^\alpha$ est fini. On pose

$$\|x\|_\alpha := \sup_{s \neq t \leqslant 1} \frac{|x(s) - x(t)|}{|s-t|^\alpha} + |x(0)| .$$

La quantité analogue au module de continuité dans $C[0,1]$ est w_α, défini par

$$w_\alpha(x, \delta) = \sup_{0 < |t-s| < \delta} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

On définit ensuite $H_\alpha^0[0,1] := \{h \in H_\alpha[0,1], \lim_{\delta \to 0} w_\alpha(h, \delta) = 0\}$ et $\|h\|_\alpha := |h(0)| + w_\alpha(h, 1)$. C'est un sous-espace séparable de $H_\alpha[0,1]$.

Une norme équivalente

Soit D_j l'ensemble des nombres dyadiques de l'intervalle $[0,1]$ de niveau j, *i.e.*,

$$D_0 := \{0,1\}\,, \quad D_j := \left\{(2l-1)2^{-j}; 1 \leqslant l \leqslant 2^{j-1}\right\}, j \geqslant 1.$$

Si $r \in D_j$ pour un certain $j \geqslant 0$, on définit $r^+ := r + 2^{-j}$ et $r^- := r - 2^{-j}$. Pour $r \in D_j$, $j \geqslant 1$, soit Λ_r la fonction affine par morceaux dont le graphe relie les points $(0,0)$, $(r^-, 0)$, $(r, 1)$, $(r^+, 0)$ et $(1, 0)$.

Critère de tension

Si $x \in C[0,1]$, alors

$$x = \sum_{r \in D} \lambda_r(x) \Lambda_r,$$

et la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

La norme séquentielle est définie par

$$\|x\|_\alpha^{\text{seq}} := \sup_{j \geqslant 0} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(x)| .$$

Elle est équivalente à $\|\cdot\|_\alpha$.

Proposition

Une suite $(\xi_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments aléatoires de H_α^0 (pour laquelle $\xi_n(0) = 0$) est tendue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{J \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \mu \left\{ \sup_{j \geqslant J} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(\xi_n)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Le cas i.i.d. : une première observation

Soit $(X_j)_j$ une suite i.i.d. vérifiant le principe d'invariance dans H_α (on suppose X_0 centrée et de variance 1). Pour tout $\delta > 0$, $w_\alpha(n^{-1/2} S_n^{pl}, \delta) \to w_\alpha(W, \delta)$ et pour n tel que $n\delta \geqslant 1$, $w_\alpha(n^{-1/2} S_n^{pl}, \delta) \geqslant n^{-1/2+\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j|$ donc pour tout δ,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu \left\{ n^{-1/2+\alpha} \max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j| > 1 \right\} \leqslant \mu \left\{ w_\alpha(W, \delta) > 1 \right\}.$$

d'où l'on déduit

$$\mu \left\{ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j| > n^{1/2-\alpha} \right\} \to 0.$$

Par indépendance, ceci est équivalent à

$$n \cdot \mu \left\{ |X_0| > n^{1/p} \right\} \to 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \alpha.$$

Donc la condition

$$\lim_{t\to+\infty} t^p \mu \left\{ |X_0| > t \right\} = 0$$

est nécessaire.

Le cas i.i.d. : la condition nécessaire et suffisante

Lamperti (1962) a montré que si $(X_j)_{j\geqslant 0}$ est une suite i.i.d. centrée telle que $X_0 \in \mathbb{L}^p$, alors le principe d'invariance a lieu dans $H^0_\gamma[0,1]$ pour tout $\gamma < 1/2 - 1/p$.

Račkauskas et Suquet (2003) ont montré que pour une suite i.i.d. centrée $(X_j)_{j\geqslant 0}$, une condition nécessaire et suffisante pour obtenir le principe d'invariance dans $H^0_{1/2-1/p}[0,1]$ est $t^p \mu\left\{|X_0| > t\right\} \to 0$.

On se fixe pour objectif d'étendre ce résultat à des suites strictement stationnaires non nécessairement indépendantes.

Idée de démonstration (1)

On considère $(X_j)_{j \geqslant 0}$ une suite i.i.d., X_0 centrée et telle que $t^p \mu \{|X_0| > t\} \to 0$.
On doit montrer la tension de $(n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}})_{n \geqslant 1}$ dans $H^0_{1/2-1/p}$, *i.e.*, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{J \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \mu \left\{ \sup_{j \geqslant J} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} \left| \lambda_r(S_n^{\mathrm{pl}}) \right| > n^{1/2} \varepsilon \right\} = 0.$$

1. On peut montrer que

$$\mu \left\{ \sup_{\log n \leqslant j} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} \left| \lambda_r(S_n^{\mathrm{pl}}) \right| > n^{1/2} \varepsilon \right\} \leqslant C(\alpha, \varepsilon) n \cdot \mu \left\{ |X_0| > n^{1/p} \varepsilon \right\}.$$

2. On pose $X_i' := X_i \chi\left(\left\{|X_i| > n^{1/p}\delta\right\}\right) - \mathbb{E}\left[X_i \chi\left(\left\{|X_i| > n^{1/p}\delta\right\}\right)\right]$ pour un entier n et $\delta > 0$ fixés, et $\widetilde{S}_N^{\mathrm{pl}}$ le processus somme partielles associé aux X_j'. L'inégalité suivante a lieu

$$\mu \left\{ \sup_{J \leqslant j \leqslant \log n} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} \left| \lambda_r(\widetilde{S}_n^{\mathrm{pl}}) \right| > n^{1/2} \varepsilon \right\} \leqslant C(\varepsilon, \alpha, \delta) n \mu \left\{ |X_0| > n^{1/p} \varepsilon \right\}.$$

Idée de démonstration (2)

3 Il reste à contrôler

$$P(J,n,\delta) := \sum_{j=J}^{\log n} 2^j \mu \left\{ \left| \sum_{i=1}^{2n2^{-j}} (X_i - X_i') \right| > \varepsilon n^{1/2} 2^{-\alpha j} \right\}.$$

4 Par l'inégalité de Markov, pour $\eta > 0$,

$$P(J,n,\delta) \leqslant \varepsilon^{-p-\eta} n^{-p/2-\eta/2} \sum_{j=J}^{\log n} 2^{pj/2} 2^{j\alpha\eta} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{2n2^{-j}} (X_i - X_i') \right|^{p+\eta}.$$

5 Puis on utilise l'inégalité de Rosenthal

$$\mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^{N} \xi_j \right|^q \leqslant C(q) \left(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{E} \left|\xi_j\right|^q + \left(\sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\left[\xi_j^2\right] \right)^{q/2} \right), (\xi_j) \text{ independante et centrée}$$

et la majoration

$$\mathbb{E} \left| X_i - X_i' \right|^{p+\eta} \leqslant C(p) n^{\eta/p} \delta^\eta \cdot \sup_t t^p \mu \left\{ |X_0| > t \right\}.$$

Idée de démonstration (3)

6 Ceci fournit la majoration

$$\mu\left\{\sup_{j\geqslant J}2^{j\alpha}\max_{r\in D_j}\left|\lambda_r(S_n^{\mathrm{pl}})\right|>n^{1/2}\varepsilon\right\}\leqslant C(\varepsilon,p,\eta,\mathrm{Loi}(X_0))\left(\sum_{j=J}^{+\infty}2^{-\eta j}\right.$$
$$\left.+\delta^{\eta}+C(\delta,\varepsilon)n\mu\left\{\left|X_0\right|>n^{1/p}\varepsilon\right\}\right)$$

Conditions de mélange (1)

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$. On définit

- le coefficient d'α-mélange :

$$\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \sup \left\{ \left|\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)\right|, A\in\mathcal{A}, B\in\mathcal{B}\right\},$$

- le coefficient de ρ-mélange :

$$\rho(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \sup \left\{ \operatorname{Corr}(f,g), f\in\mathbb{L}^2(\mathcal{A}), g\in\mathbb{L}^2(\mathcal{B})\right\}.$$

L'inégalité suivante a lieu :

$$4\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leqslant \rho(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

Conditions de mélange (2)

Pour une suite $X = (X_k, k \in \mathbb{Z})$ et $n \geqslant 0$ on pose

$$\alpha_X(n) = \alpha(n) = \sup_{m \in \mathbb{Z}} \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^{m}, \mathcal{F}_{n+m}^{\infty})$$

où $\mathcal{F}_u^v$ est la tribu engendrée par les X_k où $u \leqslant k \leqslant v$ (si $u = -\infty$ ou $v = \infty$, les inégalités sont strictes).
On définit de même $\rho_X(n)$. On pose $\mathcal{F}_I := \sigma(X_i, i \in I)$ et

$$\rho^*(n) := \sup \left\{ \rho(\mathcal{F}_I, \mathcal{F}_J), \inf |i - j| \geqslant n \right\}.$$

Si $(X_j)_{j \geqslant 0}$ est indexée par les entiers naturels, alors $\alpha_X(n) := \alpha_{X'}(n)$ où $X' = (\dots, 0, X_0, X_1, \dots)$.

Les inégalités suivantes ont lieu

$$\alpha_X(n) \leqslant \rho_X(n) \leqslant \rho_X^*(n).$$

La suite X est α-mélangeante si $\Leftrightarrow \alpha_X(n) \to 0$.

Un résultat de Doukhan, Massart et Rio

Soit $X = (X_j)_{j \geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire.

- $\alpha^{-1}(u) := \inf \{k, \alpha_X(k) \leqslant u\}$;
- Q_{X_0} désigne l'inverse généralisé de $t \mapsto \mu\{X_0 > t\}$, *i.e.* $Q_X(u) = \inf\{t \geqslant 0, \mu\{|X| > t\} \leqslant u\}$.

Théorème (Doukhan et al. (1995))

Soit $(X_j)_{j \geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées telle que

$$\int_0^1 \alpha^{-1}(u) Q_{X_0}^2(u) du < \infty.$$

Alors $\lim_{n \to +\infty} \sigma_n^2 / n =: \sigma$ *existe et*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}}(f) \to \sigma W \text{ en loi dans } C[0,1].$$

Deux conditions de type Doukhan et al.

Théorème

Soit $p > 2$ et soit $(X_j)_{j \geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées. On suppose que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(C) *pour un certain $\eta > 0$, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^{p+\eta-1}$ converge et*

$$\int_0^1 [\alpha^{-1}(u)]^{p-1} Q_{X_0}(u)^p \mathrm{d}u < +\infty.$$

(C') $\lim_{t \to +\infty} t^p \lambda \left\{ u \mid \alpha^{-1}(u) Q(u) > t \right\} = 0.$

Alors $(X_j)_{j \geqslant 0}$ vérifie le principe d'invariance dans $H^0_{1/2-1/p}[0,1]$, i.e.,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}} \to \sigma W,$$

où $\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} \sigma_n^2 / n$.

Comparaison de (C) et (C')

1. Si $(X_j)_{j\geqslant 0}$ est une suite m-dépendante (identiquement distribuée), alors les équivalences suivantes ont lieu :

$$(C) \Leftrightarrow X_0 \in \mathbb{L}^p \text{ et } (C') \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} t^p \mu\left\{|X_0| > t\right\} = 0.$$

2. Si $\alpha^{-1}(u) \overset{u\to 0}{\sim} \log u$ et $Q(u)\alpha^{-1}(u) \geqslant u^{-1/p}$, alors la condition (C) est vérifiée (avec $\eta = 1/2$) alors que la condition (C') ne l'est pas.

Les conditions (C) et (C') sont donc independantes.

Quelques remarques

1. Si $(X_j)_{j\geqslant 0}$ est une suite m-dépendante (identiquement distribuée), le résultat de Račkauskas et Suquet peut être déduit en utilisant la condition (C').

2. Le résultat de Hamadouche (2000) exige des moments d'ordre strictement plus grand que p (pour X_0) afin de déduire le principe d'invariance dans $H_\gamma[0,1]$ pour tout $\gamma < 1/2 - 1/p$. Les conditions (C) ou (C') peuvent être vérifiées sans que cette hypothèse sur les moments n'ait lieu.

3. Soit $(X_j)_{j\geqslant 1}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées telle que $t^p\mu\left\{|X_0| > t\right\} \leqslant \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. En posant $\delta(u) := \inf\left\{s > 0 \mid \varepsilon(su^{-1/p}) \leqslant s^p\right\}$, on obtient $Q(u) \leqslant u^{-1/p}\delta(u)$, et donc

$$\int_0^1 \frac{\alpha^{-1}(u)\delta(u)^p}{u}\mathrm{d}u < \infty \Rightarrow (C').$$

Outil principal : des inégalités de type Fuk-Nagaev et Rosenthal

- Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires;
- $Q := \sup_{i\geqslant 1} Q_{X_i}$; $R(u) = \alpha^{-1}(u)Q(u)$ et $H(u) = R^{-1}(u)$;
- $s_N^2 := \sum_{i,j=1}^N |\mathrm{Cov}(X_i, X_j)|$.

Théorème (Rio (1995))

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires centrées ayant une variance finie. Alors, pour tout $\lambda > 0$, et pour tous $N \geqslant 1$, $r \geqslant 1$,

$$\mu\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N} |S_k| \geqslant 4\lambda\right\} \leqslant 4\left(1 + \frac{\lambda^2}{rs_N^2}\right)^{-r/2} + 4N\lambda^{-1}\int_0^{H(\lambda/r)} Q(u)\mathrm{d}u.$$

Proposition

Soit $p \geqslant 2$ et $X = (X_j)_{j\geqslant 1}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées. Pour tout entier $N \geqslant 1$, l'inégalité suivante a lieu :

$$\mathbb{E}\left[\max_{1\leqslant k\leqslant N} |S_k|^p\right] \leqslant a_p s_N^p + Nb_p \int_0^1 \left[\alpha_X^{-1}(u)\right]^{p-1} Q^p(u)\mathrm{d}u,$$

où a_p et b_p ne dépendent que de p et $Q(u) = \max_{1\leqslant j\leqslant N} Q_{X_j}(u)$.

Inégalités de moments pour les suites ρ-mélangeantes

Proposition (Shao, 1995)

Soit $(X_j)_{j\geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées et $q\geqslant 2$. Il existe une constante K qui ne dépend que de q et de la suite $(\rho_X(n))_{n\geqslant 1}$ telle que pour tout entier n,

$$\mathbb{E}\left|S_n\right|^q \leqslant K\cdot n^{q/2}\exp\left(K\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho(2^i)\right)\left\|X_0\right\|_2^q \\ + K\cdot n\cdot\exp\left(K\sum_{i=0}^{[\log n]}\rho^{2/q}(2^i)\right)\left\|X_0\right\|_q^q .$$

Proposition (Peligrad, Gut (1999))

Soient $q>2$ et $X:=(X_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires centrée vérifiant $\mathbb{E}\left|X_i\right|^q<\infty$ pour tout $i\geqslant 1$. On suppose que $\rho_X^*(N)<1$ pour un certain $N\geqslant 1$. Alors il existe une constante $C=C(N,\rho_X^*(N),q)$ telle que pour tout entier $n\geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\left|S_n\right|^q\leqslant C\left(\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left|X_i\right|^q+\left(\sum_{i=1}^n\mathbb{E}X_i^2\right)^{q/2}\right).$$

Le cas des suites ρ-mélangeantes

Théorème

Soient $p > 2$ et $(X_j)_{j\geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires centrées telle que $t^p\mu\left\{|X_0| > t\right\} \to 0$. Supposons que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(C1) *la serie $\sum_{i=1}^{+\infty}\rho(2^i)$ converge;*

(C2) $\lim_{n\to\infty}\rho_X^*(n) = 0$.

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}S_n^{\mathrm{pl}} \to \sigma W \text{ en loi dans } H^0_{1/2-1/p}[0,1],$$

avec $\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\sigma_n^2/n$.

Si l'on suppose seulement $t^p\mu\left\{|X_0| > t\right\} \to 0$, $\rho_X(n) \to 0$ et $\sigma_n^2 = \mathbb{E}[S_n^2] \to \infty$, alors pour tout $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$,

$$\frac{1}{\sigma_n}S_n^{\mathrm{pl}} \to W \text{ en loi dans } H^0_\gamma[0,1].$$

Le cas des martingales : un résultat négatif

On dit que la suite $(X_j)_{j\geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale s'il existe une filtration $(\mathcal{F}_j)_{j\geqslant 0}$ telle que X_j est $\mathcal{F}_j$-mesurable et $\mathbb{E}[X_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] = 0$.

Théorème

Soit $\alpha \in]0, 1/2[$. Il existe une suite strictement stationnaire ergodique d'accroissements d'une martingale $(X_j)_{j\geqslant 0}$ telle que

- $\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{1/2-\alpha}} \mu\{|X_0| > t\} = 0$ *et*
- *la suite $(X_j)_{j\geqslant 0}$ ne vérifie pas le principe d'invariance dans $H_\alpha^0[0,1]$.*

Le cas des martingales : un résultat positif

Soit $T\colon\Omega\to\Omega$ une application bijective, bi-mesurable, préservant la mesure. On note $\mathcal{I}:=\left\{A, T^{-1}A=A\right\}$ la tribu des invariants.

Théorème

Soit $\alpha\in]0,1/2[$ et $(m\circ T^j)_{j\geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale. On suppose que $t^p\mu\left\{|m|>t\right\}\to 0$ et

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\sup_{k\geqslant j}2^{\frac{k}{1-2\alpha}}\mu\left\{\mathbb{E}[m^2\mid\mathcal{F}_{-1}]>2^k\right\}<+\infty.$$

Alors $n^{-1/2}S_n^{\mathrm{pl}}\to\eta W$ en loi dans $H_\alpha^0[0,1]$, où $\eta=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[S_n^2\mid\mathcal{I}]/n$.

1. Le théorème impose que $\mathbb{E}[m^2\mid\mathcal{F}_{-1}]\in\mathbb{L}^{p/2}$, où p est tel que $1/2-1/p=\alpha$.
2. Si $\mathbb{E}[|m|^p\log(1+|m|)]$ est finie, alors les conditions du théorème sont vérifiées.
3. La question de la validité du théorème sous l'hypothèse $m\in\mathbb{L}^p$ reste ouverte.