Une condition suffisante pour la décomposition ortho-martingale/cobord pour les champs aléatoires

Davide Giraudo

Rouen, 6 octobre 2014
Groupe de travail en Probabilités, Théorie Ergodique et Systèmes Dynamiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé.

Définition

La suite $(X_j, j \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}$ est strictement stationnaire si pour tout entier n, les suites $(X_{j+n}, j \in \mathbb{Z})$ et $(X_j, j \in \mathbb{Z})$ ont la même loi.

Soit $T : \Omega \to \Omega$ bijective, bi-mesurable, et préservant la mesure : $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors la suite $\left(f \circ T^j, j \in \mathbb{Z}\right)$ est strictement stationnaire.

Réciproquement, toute suite strictement stationnaire peut être représentée de cette manière, *i.e.*, $(f \circ T^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ a la même loi que $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ pour un certain T et un certain f.

On appelle le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique et $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu telle que $\mathcal{M} \subset T^{-1}\mathcal{M}$.

Théorème (Gordin, 1969)

Si $f \colon \Omega \to R$ est une fonction de carré intégrable $\mathcal{M}$-mesurable telle que $\mathbb{E}\left(f \mid \cap_{i \in \mathbb{Z}} T^i \mathcal{M}\right) = 0$ et

$$\sum_{k \geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^k \mathcal{M}\right) \right\|_2 < +\infty,$$

alors il existe des fonctions $m, g \colon \Omega \to R$ de carré intégrable telles que

$$f = m + g - g \circ T,$$

et m est $\mathcal{M}$-mesurable, $\mathbb{E}[m \mid T\mathcal{M}] = 0$ et g est $T\mathcal{M}$-mesurable.

On dit que m est un accroissement d'une martingale (AM).

Le terme $g - g \circ T$ est appelé cobord.

On cherche à étudier le comportement asymptotique de $S_n(f) := \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$.

Si T est ergodique, alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(m) \to \sqrt{\mathbb{E}[m^2]} \cdot \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi,}$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Comme $S_n(g - g \circ T) = g - g \circ T^n$, $n^{-1/2} S_n(g - g \circ T) \to 0$ presque sûrement donc en probabilité.

Donc, sous les conditions $\sum_{k \geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^k \mathcal{M}\right) \right\|_2 < +\infty$ et $\mathbb{E}\left(f \mid \cap_{i \in \mathbb{Z}} T^i \mathcal{M}\right) = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(f) \to \sqrt{\mathbb{E}[m^2]} \cdot \mathcal{N}(0,1) \text{ en loi.}$$

On pose

$$S_n^{\mathrm{pl}}(f)(t) := \sum_{j=1}^{[nt]} f \circ T^j + (nt - [nt]) f \circ T^{[nt]+1}.$$

Alors sous les conditions précédentes,

$$n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(f) \to \sqrt{\mathbb{E}[m^2]} \cdot W \text{ en loi dans } C[0,1],$$

où W est un mouvement brownien standard.

Idées

- Pour les accroissements de martingales m, on dispose d'inégalités sur le maximum des sommes partielles :

$$\mathbb{E}\left(\max_{1 \leqslant n \leqslant N} |S_n(m)|^p\right) \leqslant C_p \mathbb{E}\left|S_N(m^2) \circ T^j\right|^{p/2}, p \geqslant 2.$$

- On peut donc contrôler le module de continuité de $n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(m)$.
- Comme $g \in \mathbb{L}^2$, $n^{-1/2} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|g \circ T^j\right| \to 0$ en probabilité.

Position du problème

Objectif : étendre la décomposition martingale/cobord aux champs aléatoires, *i.e.*, aux processus indexés par $\mathbb{Z}^d$ ($d \geqslant 2$) au lieu de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$.

Problèmes :

1. bien définir ce qui va jouer le rôle de martingale (la notion de passé est moins claire car on ne dispose pas d'une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}^d$) ;

2. si $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(Y_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites indépendantes, toutes deux i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on pose $Z_{i,j} := X_i Y_j$. C'est un champ de type différence de martingale pour "toute définition raisonnable" mais on n'a pas de théorème limite central.

Notations

Soient $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d), \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{Z}^d$. On dit que $\mathbf{s} \preceq \mathbf{t}$ si $s_j \leqslant t_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\} =: \langle d \rangle$. On pose $\min(\mathbf{s}, \mathbf{t}) := (\min(s_j, t_j))_{1 \leqslant j \leqslant d}$. On note $\mathbf{e_i} := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ pour $i \in \langle d \rangle$.

Définition

Une famille $(\mathcal{G}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est une filtration commutante si

- $\mathcal{G}_{\mathbf{i}} \subset \mathcal{G}_{\mathbf{j}} \subset \mathcal{F}$ pour tous $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d$ vérifiant $\mathbf{i} \preceq \mathbf{j}$, et
- pour tous $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ et toute variable aléatoire bornée Z,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{G}_{\mathbf{s}}\right) \mid \mathcal{G}_{\mathbf{t}}\right) = \mathbb{E}\left(Z \mid \mathcal{G}_{\min(\mathbf{s}, \mathbf{t})}\right).$$

Définition (Cairoli, 1969)

Un champ aléatoire $(X_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ de différences d'ortho-martingales (DOM) s'il existe une filtration commutante $(\mathcal{G}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ telle que $X_{\mathbf{k}}$ est $\mathcal{G}_{\mathbf{k}}$-mesurable pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$ et $\mathbb{E}\left(X_k \mid \mathcal{G}_{\mathbf{l}}\right) = 0$ pour tous $\mathbf{l} \preceq \mathbf{k}$ avec $\mathbf{l} \neq \mathbf{k}$.

Choix de $\mathcal{M}$

Lemme

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois sous-tribus de $\mathcal{F}$ mutuellement indépendantes. Alors pour toute v.a. intégrable X,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{A} \vee \mathcal{B}\right) \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{C}\right) = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{B}\right).$$

Soit pour tout $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, $T^{\mathbf{k}} \colon \Omega \to \Omega$ un opérateur préservant la mesure, de sorte que $T^{\mathbf{k}+\mathbf{l}} = T^{\mathbf{k}} \circ T^{\mathbf{l}}$ pour tous $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$.

On suppose que $\varepsilon_{\mathbf{i}} := h \circ T^{\mathbf{i}}$ sont i.i.d. (par exemple si on prend un système dynamique de type Bernoulli). On pose

$$\mathcal{M} := \sigma(\varepsilon_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \preceq \mathbf{0}).$$

En posant $\mathcal{G}_{\mathbf{i}} := T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M}$, on obtient par le lemme une filtration commutante.

Cas de la dimension $d = 2$

Soient $(T^{-\mathbf{k}}\mathcal{M})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2}$ une filtration commutante. On pose $U^{\mathbf{i}}(f)(\omega) := f(T^{\mathbf{i}}\omega)$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2$.

Théorème (El Machkouri, G.)

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{M})$, $\mathbb{E}(f) = 0$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^{k\mathbf{e_1}}\mathcal{M}\right) \right\|_2 < \infty \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} k \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^{k\mathbf{e_2}}\mathcal{M}\right) \right\|_2 < +\infty.$$

Alors f admet la décomposition

$$f = m + (I - U_1)m_1 + (I - U_2)m_2 + (I - U_1)(I - U_2)g,$$

où $(U^{\mathbf{i}}m)_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^2}$ est un champ DOM, $(U^{k\mathbf{e_2}}m_1)_{k\geqslant 0}$ et $(U^{k\mathbf{e_1}}m_2)_{k\geqslant 0}$ sont des suites DM, et $m, m_1, m_2, g \in \mathbb{L}^2$.

Exemple : processus linéaire

Soit $(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}} \subset \mathbf{R}$ tels que $\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{i,j}^2 < +\infty$ et

$$f := X_0 = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}\cdot\varepsilon_{-i,-j}.$$

Comme

$$\left\|\mathbb{E}\left(f \mid T^{ke_1}\mathcal{M}\right)\right\|_2 = \left\|\sum_{i\geqslant k}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}\cdot\varepsilon_{-i,-j}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{i\geqslant k}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}^2},$$

on aura une décomposition ortho-martingale/cobord si les séries

$$\sum_{k\geqslant 1} k\sqrt{\sum_{i\geqslant k}\sum_{j\geqslant 0} a_{i,j}^2} \text{ et } \sum_{k\geqslant 1} k\sqrt{\sum_{j\geqslant k}\sum_{i\geqslant 0} a_{i,j}^2}$$

sont convergentes.

Cas $d \geqslant 2$ arbitraire

Théorème (El Machkouri, G.)

Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{M})$, $\mathbb{E}(f) = 0$ et $(T^{-\mathbf{k}}\mathcal{M})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ une filtration commutante. On suppose que

$$\text{pour tout } s \in \langle d\rangle, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^{d-1} \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^{k\mathbf{e_s}}\mathcal{M}\right)\right\|_2 < \infty.$$

Alors f admet la décomposition

$$f = m + \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq \langle d\rangle} \prod_{s\in J}(I - U^{\mathbf{e_s}})m_J + \prod_{s=1}^{d}(I - U^{\mathbf{e_s}})g,$$

où

- *m, g et m_J sont de carré intégrable ;*
- *$(U^{\mathbf{i}}m)_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ de type DOM et pour tout $\emptyset \subsetneq J \subsetneq \langle d\rangle$, $\left(U^{\mathbf{i}}_{J^c} m_J\right)_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^{d-|J|}}$ est un champ de type DOM.*

Principe d'invariance dans $C[0,1]^d$

Soit $(X_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire strictement stationnaire. On pose

$$S_n(\mathbf{t}) := \sum_{\mathbf{i}\in\langle n\rangle^d} \lambda([0,n\mathbf{t}]\cap R_{\mathbf{i}})X_{\mathbf{i}},$$

où $R_{\mathbf{i}} =]i_1-1,i_1]\times\cdots\times]i_d-1,i_d]$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On dit que le principe d'invariance a lieu si $\{n^{-d/2}S_n(\mathbf{t});\mathbf{t}\in[0,1]^d\}_{n\geqslant 1}$ converge en loi dans $C[0,1]^d$ vers un drap brownien.

Théorème (Wichura, 1969)

Si le champ $(X_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendant, identiquement distribué et centré, alors le principe d'invariance a lieu.

Un résultat pour des champs de type différence de martingales

Soit $(\xi_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire. Si $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_d)$ et $n_i\geqslant 1$, on pose

$$\mathcal{G}_{\mathbf{n}}:=\sigma\left(\xi_{\mathbf{p}},p_j\geqslant 1,1\leqslant j\leqslant d,\text{ et il existe } i\in\{1,\dots,d\}\text{ tel que }p_i\leqslant n_i\right).$$

Théorème (Basu et Dorea, 1979)

Soit $(\xi_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}$ un champ aléatoire strictement stationnaire ergodique, de carré intégrable, tel que

$$\mathbb{E}[\xi_{\mathbf{n}}\mid\mathcal{F}_{\mathbf{m}}]=0 \text{ p.s. si } m<n.$$

Alors le principe d'invariance a lieu.

Une condition de type Maxwell-Woodroofe

Soit $\mathcal{M}$ une tribu telle que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, $\mathbb{E}_0(h) := \mathbb{E}[h \mid \mathcal{M}]$.

Théorème (Peligrad, Utev)

Soit f une fonction $\mathcal{M}$-mesurable telle que $\sum_n n^{-3/2} \left\|\mathbb{E}_0[S_n(f)]\right\|_2$ converge. Alors la suite $(f \circ T^i)_{i \geqslant 1}$ vérifie le principe d'invariance, i.e., $n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(f) \to \eta W$, où η et W sont indépendantes et $\eta = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \mathbb{E}[S_n^2 \mid \mathcal{I}]$.
C'est en particulier vrai si $\sum_n n^{-1/2} \left\|\mathbb{E}[f \circ T^n \mid \mathcal{F}_0]\right\|_2$ converge.

On pose

$$\Delta_{d,p}(f) := \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d} \frac{\left\| f \circ T^{\mathbf{k}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{1}} \right\|_p}{\prod_{i=1}^d k_i^{1/2}},$$

où $\mathcal{F}_{\mathbf{k}} = \sigma(\varepsilon_{\mathbf{i}}, \mathbf{i} \preceq k)$ et $(\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ i.i.d.

Théorème (Wang-Woodroofe)

Si $\Delta_{d,2}(f)$ est fini alors $(f \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d}$ vérifie le théorème limite central.
Si $\Delta_{d,p}(f)$ est fini pour un $p > 2$, alors $(f \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d}$ vérifie le principe d'invariance.

Une condition de type Hannan

Soit $(\mathcal{F}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une filtration. On pose $P_j := \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_j] - \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_{j-1}]$ (opérateur de projection). Si $(f \circ T^j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite strictement stationnaire, où f est $\mathcal{F}_0$-mesurable, telle que $\sum_{j\geqslant 0} \|P_j(f)\|_2$ converge, alors le principe d'invariance a lieu (Hannan, 1972).

On pose $P_{j_1,j_2}(f) := \mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_{j_1,j_2}] - \mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_{j_1,j_2-1}] - \mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_{j_1-1,j_2}] + \mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_{j_1-1,j_2-1}]$, où $(\mathcal{F}_{j_1,j_2})_{j_1,j_2\in\mathbb{Z}}$ est une filtration commutante.

Théorème (Volný, Wang 2014)

Supposons que $\mathcal{F}_{j_1,j_2}$ soit engendrée par un champ i.i.d., f est $\mathcal{M}$-mesurable et que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}^2} \|P_j(f)\|_2 < +\infty.$$

Alors le principe d'invariance a lieu.

De la décomposition au principe d'invariance

On suppose que $\mathcal{M} = \sigma(\varepsilon_i, i_j \leqslant 0 \quad \forall j \in \langle d \rangle)$.

Théorème

Si $f \in \mathbb{L}^2$ admet la décomposition

$$f = m + \sum_{\emptyset \subsetneq J \subsetneq \langle d \rangle} \prod_{s \in J} (I - U^{\mathbf{e_s}}) m_J + \prod_{s=1}^{d} (I - U^{\mathbf{e_s}}) g,$$

où m et les m_J sont des champs de type DOM de carré intégrable et $g \in \mathbb{L}^2$, alors $(f \circ T^{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}$ vérifie le principe d'invariance.

Ceci repose sur le fait que si m est un champ de type DOM pour une filtration $(T^{-i}\mathcal{M})_{i \in \mathbb{Z}^d}$, alors la famille

$$\left\{ \frac{1}{\prod_{i=1}^{d} n_i} \max_{\mathbf{0} \preceq \mathbf{j} \preceq \mathbf{n}} \left| \sum_{\mathbf{l} \preceq \mathbf{j}} U^{\mathbf{l}} m \right|^2, \mathbf{n} \in (\mathbb{N}^*)^d \right\}$$

est uniformément intégrable.

Comparaison avec la condition de type Hannan

La condition

$$\text{pour tout } s \in \langle d \rangle, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^{d-1} \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T^{k\mathbf{e_s}}\mathcal{M}\right)\right\|_2 < \infty.$$

implique la condition de Hannan multi-dimensionnelle

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d} \|P_{\mathbf{j}}(f)\|_2 < +\infty.$$

En effet,

$$\|P_{\mathbf{j}}(f)\|_2 \leqslant 2^d \max_{1 \leqslant s \leqslant d} \left\| \mathbb{E}[f \mid T_s^{\max_{1 \leqslant i \leqslant d} j_i - 1}\mathcal{M}] \right\|_2 .$$

En revanche (même en dimension 1), la condition de Hannan ne donne pas la décomposition martingale-cobord.

Un lemme clé

Rappel : $T_i \colon \Omega \to \Omega$ est bijectif, bi-mesurable et préserve la mesure, $1 \leqslant i \leqslant d$ et $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$ pour tous i et j.

Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ sont deux sous-tribus, on note

$$\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{B}, \mu) := \{X \in \mathbb{L}^p, X \text{ est } \mathcal{A}\text{-mesurable et } \mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] = 0\}.$$

Lemme

Soit $p \geqslant 1$ et $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu telle que $(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est une filtration commutante. On suppose que $F \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ et que pour tout $s \in \langle d \rangle$,

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{d-1} \left\| \mathbb{E}\left(F \mid T_s^k \mathcal{M}\right) \right\|_p < \infty.$$

Alors pour tout $s \in \langle d \rangle$, il existe $M_s \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, T_s\mathcal{M}, \mu)$ et G_s dans $\mathbb{L}^p(\Omega, T_s\mathcal{M}, \mu)$ tels que $F = M_s + (I - U_s)G_s$. De plus, pour tous $1 \leqslant l, s \leqslant d$,

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{d-2} \left\| \mathbb{E}\left(M_s \mid T_l^k \mathcal{M}\right) \right\|_p < \infty \quad et \quad \sum_{k \geqslant 1} k^{d-2} \left\| \mathbb{E}\left(G_s \mid T_l^k \mathcal{M}\right) \right\|_p < \infty.$$

Idée de démonstration du lemme

Pour $1 \leqslant s \leqslant d$, on utilise l'expression explicite de M_s et G_s, à savoir

$$M_s = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{E}\left(U_s^k F \mid \mathcal{M}\right) - \mathbb{E}\left(U_s^k F \mid T_s \mathcal{M}\right) \quad \text{et} \quad G_s = \sum_{k \geqslant 0} \mathbb{E}\left(U_s^k F \mid T_s \mathcal{M}\right)$$

On peut alors majorer $\left\|\mathbb{E}[M_s \mid T_l^k \mathcal{M}]\right\|_p$ et $\left\|\mathbb{E}[G_s \mid T_l^k \mathcal{M}]\right\|_p$ en utilisant le fait que $(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ soit une filtration commutante.

Idée de démonstration pour $d = 2$

Comme f est $\mathcal{M}$-mesurable et $\sum_{k=1}^{\infty} k \left\| \mathbb{E}\left(f \mid T_2^k \mathcal{M}\right) \right\|_p < \infty$, il existe m_2 et g_2 telles que

$$f = m_2 + (I - U_2) g_2,$$

où $m_2 \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, T_2\mathcal{M}, \mu)$ et $g_2 \in \mathbb{L}^p(\Omega, T_2\mathcal{M}, \mu)$.

Par le lemme il vient $\sum_{r \geqslant 1} \left\| \mathbb{E}\left(m_2 \mid T_1^r \mathcal{M}\right) \right\|_p < \infty$ et donc on peut écrire

$$m_2 = m_1 + (I - U_1) g_1,$$

où $m_1 \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, T_1\mathcal{M}, \mu)$ et $g_1 \in \mathbb{L}^p(\Omega, T_1\mathcal{M}, \mu)$.

Par conséquent,

$$f = m_1 + (I - U_1) g_1 + (I - U_2) g_2.$$

On pose $m := m_1 - \mathbb{E}\left(m_1 \mid T_2\mathcal{M}\right)$ (donc $\mathbb{E}\left(m \mid T_2\mathcal{M}\right) = 0$).

Idée de démonstration pour $d = 2$

En utilisation la propriété F4,

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(m_1 \mid T_2\mathcal{M}\right) \mid T_1\mathcal{M}\right) = \mathbb{E}\left(m_1 \mid T_1 T_2\mathcal{M}\right) = 0$$

et donc $\mathbb{E}\left(m \mid T_1\mathcal{M}\right) = 0$: $(U^i m)_{i\in\mathbb{Z}^2}$ est un champ DOM.

Comme $m_2 = m_1 + (I - U_1)g_1$ et $\mathbb{E}\left(m_2 \mid T_2\mathcal{M}\right) = 0$, on déduit

$$\mathbb{E}\left(m_1 \mid T_2\mathcal{M}\right) = -\mathbb{E}\left(g_1 \mid T_2\mathcal{M}\right) + U_1\mathbb{E}\left(g_1 \mid T_1 T_2\mathcal{M}\right).$$

La fonction g_1 est $T_1\mathcal{M}$-mesurable et $(T^{-i}\mathcal{M})_{i\in\mathbb{Z}^2}$ est une filtration commutante, donc $\mathbb{E}\left(g_1 \mid T_1 T_2\mathcal{M}\right) = \mathbb{E}\left(g_1 \mid T_2\mathcal{M}\right)$, d'où

$$\mathbb{E}\left(m_1 \mid T_2\mathcal{M}\right) = -(I - U_1)\mathbb{E}\left(g_1 \mid T_2\mathcal{M}\right).$$

On rassemble les termes :

$$f = m + (I - U_1)[g_1 - \mathbb{E}(g_1 \mid T_2\mathcal{M})] + (I - U_2)g_2.$$

On décompose g_2 suivant T_1.

Par le lemme, $\sum_{r\geqslant 1} \|\mathbb{E}(g_2 \mid T_1^r\mathcal{M})\|_p < \infty$, donc

$$g_2 = \overline{m}_1 + (I - U_1)\overline{g}_1,$$

où $\overline{m}_1 \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, T_1\mathcal{M}, \mu)$ et $\overline{g}_1 \in \mathbb{L}^p(\Omega, T_1\mathcal{M}, \mu)$. Donc $(U_1^k\overline{m}_1)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements d'une martingale.

Au final

$$f = m + (I - U_1)[g_1 - \mathbb{E}(g_1 \mid T_2\mathcal{M})] + (I - U_2)\overline{m}_1 + (I - U_2)(I - U_1)\overline{g}_1.$$

Décomposition pour $d = 3$

On décompose f suivant T_3 :

$$f = m_3 + (I - U_3)g_3$$

où $m_3 \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, T_3\mathcal{M}, \mu)$ et $g_3 \in \mathbb{L}^p(\Omega, T_3\mathcal{M}, \mu)$.

Par le lemme, $\sum_{k \geqslant 1} k \left\| \mathbb{E}\left(m_3 \mid T_2^k \mathcal{M}\right) \right\|_p < \infty$.

On décompose par m_3 rapport à T_2, puis l'accroissement de martingale m_2 obtenu par rapport à T_1 pour obtenir

$$f = m_1 + (I - U_1)g_1 + (I - U_2)g_2 + (I - U_3)g_3,$$

avec $g_2 \in \mathbb{L}^p(\Omega, T_2\mathcal{M}, \mu)$, $g_1 \in \mathbb{L}^p(\Omega, T_1\mathcal{M}, \mu)$ et $m_1 \in \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) \ominus \mathbb{L}^p(\Omega, T_1\mathcal{M}, \mu)$.

Cas $d = 3$: obtention du champ DOM

On pose

$$m := m_1 - \mathbb{E}\left(m_1 \mid T_2\mathcal{M}\right) - \mathbb{E}\left(m_1 \mid T_3\mathcal{M}\right) + \mathbb{E}\left(m_1 \mid T_2 T_3\mathcal{M}\right).$$

On a $\mathbb{E}\left(m_1 \mid T_1\mathcal{M}\right) = 0$ et comme la filtration $(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^3}$ est commutante,

$$\mathbb{E}\left(m \mid T_1\mathcal{M}\right) = \mathbb{E}\left(m \mid T_2\mathcal{M}\right) = \mathbb{E}\left(m \mid T_3\mathcal{M}\right) = 0.$$

Traitement des termes compensateurs

Comme g_1 est $T_1\mathcal{M}$ mesurable et la filtration $(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M})$ est commutante, $\mathbb{E}\,(g_1 \mid T_1 T_2\mathcal{M}) = \mathbb{E}\,(g_1 \mid T_2\mathcal{M})$ d'où

$$\mathbb{E}\,(m_1 \mid T_2\mathcal{M}) = -(I - U_1)\mathbb{E}\,(g_1 \mid T_2\mathcal{M})\,.$$

De même,

$$\mathbb{E}\,(m_1 \mid T_3\mathcal{M}) = -(I - U_1)\mathbb{E}\,(g_1 \mid T_3\mathcal{M}) - (I - U_2)\mathbb{E}\,(g_2 \mid T_3\mathcal{M})$$

et

$$\mathbb{E}\,(m_1 \mid T_2 T_3\mathcal{M}) = -(I - U_1)\mathbb{E}\,(g_1 \mid T_2 T_3\mathcal{M})\,.$$

Fin de la démonstration du cas $d = 3$

En regroupant les termes obtenus, il vient

$$\begin{aligned} f = m &+ (I - U_1)[g_1 - \mathbb{E}(g_1 \mid T_2\mathcal{M}) - \mathbb{E}(g_1 \mid T_3\mathcal{M}) + \mathbb{E}(g_1 \mid T_2 T_3\mathcal{M})] \\ &+ (I - U_2)[g_2 - \mathbb{E}(g_2 \mid T_3\mathcal{M})] + (I - U_3)g_3. \end{aligned}$$

On décompose g_2 suivant T_1, et on applique le cas $d = 2$ à g_3 avec la filtration commutante $(T_1^{-i_1} T_2^{-i_2}\mathcal{M})_{i_1, i_2 \in \mathbb{Z}}$.

Conclusion

Nous avons une condition suffisante pour une décomposition ortho-martingale/cobord par rapport à une filtration commutante (sans supposer qu'elle soit engendrée par un champ i.i.d.).

Pour les champs causaux qui s'expriment comme des fonctionelles de champ i.i.d., on peut déduire de cette décomposition différents théorèmes limites :

- un principe d'invariance pour des classes de boréliens de $[0,1]^d$ plus générales ;
- un principe d'invariance dans les espaces hölderiens ;
- une loi des grands nombres de type Marcinkiewicz ;
- une loi des logarithmes itérés.