Théorèmes limites pour les champs aléatoires strictement stationnaires

Davide Giraudo

Amiens, Séminaire de Probabilités et Théorie Ergodique

3 mai 2016

Plan

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une suite $(X_j)_{j\geqslant 1}$ de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

On suppose que X_1 (et donc X_j) est centrée et de variance égale à 1. On pose $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.

Objectif général : une bonne compréhension du comportement de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque n est grand.

Par exemple, on aimerait avoir une idée de $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leqslant x)$ pour un réel x donné.

Le théorème limite central

- Si X_1 n'est pas dégénérée, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

Le théorème limite central

- Si X_1 n'est pas dégénérée, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

- La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

Le théorème limite central

- Si X_1 n'est pas dégénérée, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

- La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

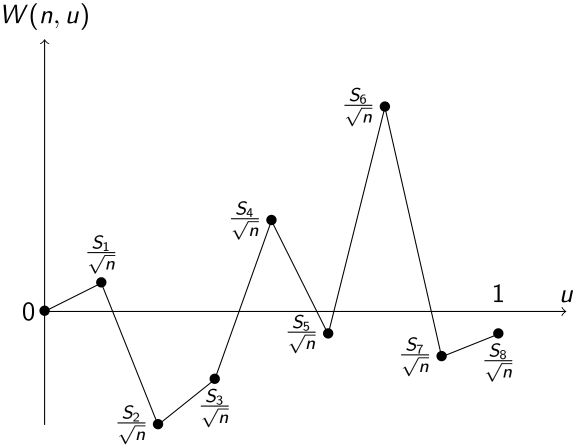
- Le *théorème limite central* fournit la convergence

$$\text{pour tout réel } x, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\omega \mid \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(\omega \mid N(\omega) \leqslant x)$$
$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Illustration

On considère $u \mapsto S_n^{\mathrm{pl}}(u)$ la fonction aléatoire telle que $S_n^{\mathrm{pl}}(k/n) = S_k$ et dont le graphe est affine par morceaux et $W(n,u) = S_n^{\mathrm{pl}}/\sqrt{n}$. (pour prendre en compte l'historique de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$).

FIGURE : La fonction $u \mapsto W(n,u)$ pour $n = 8$



Version fonctionnelle (Donsker)

On note S_n^{pl} la fonction aléatoire affine par morceaux telle que $S_n^{\mathrm{pl}}(k/n) = S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

Théorème (**Donsker, 1951**)

Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ *une suite i.i.d. centrée telle que* $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$*. Pour toute fonctionelle* $F\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$*, la convergence*

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[F\left(W_s\right)\right] \qquad (*)$$

a lieu, où $(W_s)_{s \in [0,1]}$ *est un mouvement brownien standard :* W_s *suit une loi normale centrée pour chaque* s *et la covariance entre* W_s *et* W_t *vaut* $\min\{s, t\}$.

La convergence (*) est appelée principe d'invariance car elle ne dépend pas de la loi de X_1 (pour peu que X_1 soit centrée et de variance 1).

Représentation des suites strictement stationnaires

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé.

Definition

La suite $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{R}$ est strictement stationnaire si pour tout entier n, les suites $(X_{j+n})_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ ont la même loi.

Soit $T : \Omega \to \Omega$ bijective, bi-mesurable, et préservant la mesure : $\mu\left(T^{-1}(A)\right) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors la suite $\left(f \circ T^j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire.

Réciproquement, toute suite strictement stationnaire peut être représentée de cette manière, *i.e.*, $(f \circ T^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ a la même loi que $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ pour un certain T et un certain f.

Martingales

Étant donnée une suite strictement stationnaire $\left(f \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$, on définit $S_n(f) := \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$ et

$$W_n(f,t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \left(S_{[nt]}(f) + (nt - [nt])\, f \circ T^{[nt]} \right).$$

On considère une sous-tribu $\mathcal{M}$ telle que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

Definition

On dit que la suite $(m \circ T^i)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale si m est $\mathcal{M}$-mesurable, intégrable et $\mathbb{E}\left[m \mid T\mathcal{M}\right] = 0$.

De cette manière, la suite $\left(S_n(m)\right)_{n \geqslant 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $\left(T^{-n}\mathcal{M}\right)_{n \geqslant 0}$.

Principe d'invariance pour les martingales

Théorème (Billingsley, 1961, Ibragimov, 1963)

Soit $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ *une suite d'accroissements d'une martingale avec* m *de carré intégrable. Alors la suite* $(W_n(m, \cdot))_{n \geqslant 1}$ *converge en loi vers* $\sqrt{\mathbb{E}\left[m^2 \mid \mathcal{I}\right]} \cdot W$*, où*

- $\mathcal{I}$ *est la tribu des invariants ;*
- W *est un mouvement brownien standard indépendant de* $\mathbb{E}\left[m^2 \mid \mathcal{I}\right]$*.*

Étant donnée une suite strictement stationnaire $(f \circ T^i)_{i \geqslant 0}$ avec f centrée et de carré intégrable, on chercher à approximer le processus sommes partielles $W_n(f, \cdot)$ par $W_n(m, \cdot)$ où $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale avec m de carré intégrable.

La décomposition martingale-cobord

Supposons que l'on puisse décomposer f sous la forme

$$f = m + \underbrace{g - g \circ T}_{\text{cobord}},$$

où $(m \circ T^i)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale de carré intégrable. Alors

$$S_n(f) = S_n(m) + g - g \circ T^n;$$

et comme $(g - g \circ T^n)/\sqrt{n} \to 0$ en probabilité, la fonction f vérifie le théorème limite central. Si de plus g est de carré intégrable, alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| g \circ T^j \right| \to 0 \text{ en probabilité.}$$

En particulier, f vérifie le principe d'invariance. Cependant, il est possible que $g - g \circ T \in \mathbb{L}^2$ sans pour autant avoir le principe d'invariance (**Volný, Samek, 2000**).

Décomposition martingale-cobord et principe d'invariance

Soit f une fonction $\mathcal{M}$-mesurable et de carré intégrable. La convergence de la suite $(\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{M}])_{n \geqslant 1}$ dans $\mathbb{L}^2$ est équivalente à $f = m + g - g \circ T$ avec $m, g \in \mathbb{L}^2$ et $(m \circ T^i)_{i \geqslant 0}$ une suite d'accroissements d'une martingale (**Volný, 1993**).

Notons pour $p > 1$, $\mathbb{L}^{p,\infty} = \{f, \sup_t t^p \mu\{|f| > t\} < \infty\}$ et $\mathbb{L}_0^{p,\infty} = \{f, \sup_t t^p \mu\{|f| > t\} \to 0\}$.

Théorème (**G., 2016**)

Soit f une fonction $\mathcal{M}$-mesurable et $p > 2$. On suppose que $t^p \mu\{|f| > t\} \to 0$ et

$$(\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{M}])_{n \geqslant 1} \text{ converge dans } \mathbb{L}^{p/(p-1),\infty}$$

$$(\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{M}] - \mathbb{E}[S_n(f) \mid T\mathcal{M}])_{n \geqslant 1} \text{ converge dans } \mathbb{L}_0^{p,\infty}.$$

Alors $(W_n(f, \cdot))_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers $\eta \cdot W$, où η est indépendante du mouvement brownien W.

Condition de Hannan

On définit

$$P_i(f) = \mathbb{E}\left[f \mid T^i\mathcal{M}\right] - \mathbb{E}\left[f \mid T^{i+1}\mathcal{M}\right], i \in \mathbb{Z}.$$

Si f est centrée, $\mathcal{M}$-mesurable et vérifie $\mathbb{E}\left[f \mid \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} T^i\mathcal{M}\right] = 0$, alors $f = \sum_{i\in\mathbb{Z}} P_i(f)$.

- Pour tout $i \geqslant 0$, la suite $\left(U^j\left(P_i(f)\right)\right)_{j\geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale par rapport à la filtration $\left(T^{-j+i}\mathcal{M}\right)_{j\geqslant 0}$.
- Si la série $\sum_{i\geqslant 0} \|P_i(f)\|_2$ converge, alors il existe m de carré intégrable telle que la suite $\left(m \circ T^j\right)_{j\geqslant 0}$ soit une suite d'accroissements d'une martingale et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1\leqslant j\leqslant n} \left|S_j(f) - S_j(m)\right| \right\|_2 = 0$$

(condition de **Hannan, 1973**)

Condition de Maxwell et Woodroofe

On dit que la fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{M})$ vérifie la condition de Maxwell et Woodroofe si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left\| \mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{M}\right] \right\|_2 < +\infty. \tag{MW}$$

- Si (MW) est vérifiée, alors il existe m de carré intégrable telle que la suite $\left(m \circ T^j\right)_{j \geqslant 0}$ soit une suite d'accroissements d'une martingale et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| S_j(f) - S_j(m) \right| \right\|_2 = 0.$$

- Le poids $n^{-3/2}$ est optimal : on ne peut pas le remplacer par $a_n n^{-3/2}$ où $a_n \to 0$ car le théorème limite central peut ne pas avoir lieu (**Peligrad, Utev, 2005**).
- On ne peut pas remplacer la condition (MW) par la convergence dans $\mathbb{L}^2$ de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-3/2} \mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{M}\right]$ (**Volný, 2010**).

Approche unificatrice

Gordin et Peligrad (2011) ont montré que pour une fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mathcal{M})$, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe m de carré intégrable telle que la suite $\left(m \circ T^j\right)_{j \geqslant 0}$ soit une suite d'accroissements d'une martingale et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j(f) - S_j(m)| \right\|_2 = 0 \ ;$$

2. la convergence

$$\lim_{k \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\| \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| S_j \left(\frac{1}{k} \mathbb{E}\left[S_k(f) \mid \mathcal{M} \right] \right) \right| \right\|_2 = 0$$

a lieu.

Plan

Champs aléatoires de type ortho-martingale

Contexte

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé.
- Soit $d \geqslant 2$; pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, T_i est une application bijective, bi-mesurable et préservant la mesure.
- On suppose que $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$.
- Pour $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$, on note $T^{\mathbf{i}} := T_1^{i_1} \circ \cdots \circ T_d^{i_d}$ et on dit que T est une action de $\mathbb{Z}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

On définit pour $\mathbf{n} \in (\mathbb{N}^*)^d$ et $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$S_{\mathbf{n}}(f) := \sum_{\mathbf{0} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}-\mathbf{1}} f \circ T^{\mathbf{i}},$$

où $\mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{j}$ signifie que pour tout $q \in \{1, \ldots, d\}$, $i_q \leqslant j_q$.

Processus sommes partielles en dimension d

Pour $\mathbf{i} \succcurlyeq \mathbf{1}$, on définit le cube unité de coin supérieur droit $\mathbf{i}$:

$$R_{\mathbf{i}} := \prod_{q=1}^{d} \left] i_q - 1, i_q \right].$$

Pour $\mathbf{n} \succcurlyeq \mathbf{1}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on considère les fonctions aléatoires

$$S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{t}) := \sum_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} \lambda\left([\mathbf{0}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}] \cap R_{\mathbf{i}}\right) f \circ T^{\mathbf{i}} \quad \mathbf{t} \in [0,1]^d,$$

où

- λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et
- $[\mathbf{0}, \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}] = \prod_{q=1}^{d} [0, n_q t_q]$.

Principe d'invariance dans le cas i.i.d.

Définition

Le processus $W = (W_{\mathbf{t}})_{\mathbf{t}\in[0,1]^d}$ *est un drap brownien standard est un champ aléatoire gaussien tel que* $\operatorname{Cov}(W_{\mathbf{s}}, W_{\mathbf{t}}) = \prod_{q=1}^{d} \min\{s_q, t_q\}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t} \in [0,1]^d$.

Notons $|\mathbf{n}| := \prod_{q=1}^{d} n_q$.

Théorème (Wichura, 1969)

Soit $(f \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *un champ aléatoire i.i.d. centré tel que* $\mathbb{E}\left[f^2\right] = 1$. *Alors la convergence suivante a lieu :*

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} S_{\mathbf{n}}(f, \cdot) \xrightarrow{\min n_q \to +\infty} W$$

en loi dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]^d$.

Question

Comment définir l'analogue des martingales en dimension d ?

Filtrations complètement commutantes

- Soit $\mathcal{M}$ une sous-tribu telle que pour tout $q \in \{1, \ldots, d\}$, $T_q\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.
- Ainsi, on définit par l'égalité $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} := T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$ une filtration.

Définition

Si pour tous $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ et tout variable aléatoire intégrable Y,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{\mathbf{k}}\right] \mid \mathcal{F}_{\mathbf{l}}\right] = \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{\min\{\mathbf{k},\mathbf{l}\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{\mathbf{l}}\right] \mid \mathcal{F}_{\mathbf{k}}\right] \text{ p. s.},$$

on dit que la filtration $\left(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M}\right)_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est dite complètement commutante.

Exemple

Si $(\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est un champ i.i.d., $T_q\left((\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}\right) := \left(\varepsilon_{\mathbf{i}+\mathbf{e_q}}\right)_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ alors la filtration $\left(\sigma\left(\varepsilon_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \preccurlyeq \mathbf{i}\right)\right)_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ est complètement commutante.

Les ortho-martingales

Définition

Le champ aléatoire $(M_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ *est une ortho-martingale par rapport à la filtration complètement commutante* $(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *si :*

- *pour tout* $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, $M_{\mathbf{n}}$ *est* $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$*-mesurable, intégrable et*
- *pour tout* $\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d$ *tel que* $\mathbf{i}\preccurlyeq\mathbf{j}$,

$$\mathbb{E}\left[M_{\mathbf{j}} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{i}}\right] = M_{\mathbf{i}}.$$

Définition

Le champ aléatoire $(m\circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *est un champ de type accroissements d'ortho-martingales (AOM) si* $(S_{\mathbf{n}}(m))_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}} := \left(\sum_{\mathbf{0}\preccurlyeq\mathbf{j}\preccurlyeq\mathbf{n}-\mathbf{1}} m\circ T^{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}}$ *est une ortho-martingale.*

Quelques propriétés des ortho-martingales

Soit $(m \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ de type AOM. Soit $\mathbf{N} := (N_1, \ldots, N_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d-1}$

- La suite $(S_{\mathbf{N},n}(m))_{n \geqslant 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $\left(\sigma\left(T^{-i}\mathcal{M}, \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d, i_d \leqslant n\right)\right)_{n \geqslant 1}$.
- La suite $(M_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$M_n := \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{N}} |S_{\mathbf{i},n}(m)|$$

  est une sous-martingale par rapport à la filtration $\left(\sigma\left(T^{-i}\mathcal{M}, \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d, i_d \leqslant n\right)\right)_{n \geqslant 1}$.
- À l'aide de d applications de l'inégalité maximale de Doob et de l'inégalité de Burkholder, on obtient que pour $p \geqslant 2$,

$$\frac{1}{|\mathbf{K}|^{p/2}} \left\| \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{K}} |S_{\mathbf{i}}(m)| \right\|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^{pd} (p-1)^{d/2} \|m\|_p .$$

Inégalités de déviation

Proposition (G., 2016)

Soit $(m \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ *un champ de type AOM par rapport à la filtration complètement commutante* $\left(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{M}\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ *et* $q > 2$*. Alors pour tous* $t > 0$ *et* $\mathbf{n} \in (N^*)^d$ *l'inégalité suivante a lieu :*

$$\mu\left\{\max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} |S_{\mathbf{i}}(m)| \geqslant \prod_{l=1}^{d} \sqrt{n_l}\, t\right\} \leqslant c(q,d) \int_0^{+\infty} \mu\left\{|m| > tv\right\} (1 + |\log v|)^{d-1} \min\left\{v, v^{q-1}\right\} \mathrm{d}v.$$

Le théorème limite central pour les ortho-martingales

Théorème (Volný, 2015)

Soit $(m \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ *un champ de type AOM tel que* $\mathbb{E}\left[m^2\right] = 1$ *et au moins une des transformations* $T_q, 1 \leqslant q \leqslant d$ *est ergodique, alors* $(S_{\mathbf{n}}(m)/\sqrt{|\mathbf{n}|})_{\mathbf{n} \succcurlyeq \mathbf{1}}$ *converge vers une loi normale standard quand* $\min_{1 \leqslant q \leqslant d} n_q \to +\infty$.

Remarque

Sous les mêmes conditions, le principe d'invariance a lieu dans $C\left([0,1]^d\right)$.

Décomposition ortho-martingale/cobord

On pose $U_q f(\omega) = f(T_q(\omega))$, $q \in \{1, \ldots, d\}$. Cas $d = 2$: on cherche à décomposer f sous la forme

$$f = m + (I - U_1)m_1 + (I - U_2)m_2 + (I - U_1)(I - U_2)g,$$

où $(m \circ T^{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est un champ de type AOM, $(m_q \circ T_q^i)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale pour $q \in \{1, 2\}$, et $m, m_1, m_2, g \in \mathbb{L}^p$ pour $p \in [1, +\infty[$. On suppose ici que f est $\mathcal{M}$-mesurable.

- Une condition suffisante est la convergence de la série $\sum_{i,j \geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left[f \circ T^{i,j} \mid \mathcal{M} \right] \right\|_p$ (**El Machkouri, G., 2016**).
- Une condition nécessaire et suffisante (cf. **Volný, 2016**) est

$$\sup_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*} \left\| \mathbb{E}\left[S_{n_1, n_2}(f) \mid \mathcal{M} \right] \right\|_p < +\infty.$$

Utilisation

Avec $p = 2$. On a

$$S_{n_1,n_2}(f) = S_{n_1,n_2}(m) + (I - U^{n_1})S_{1,n_2}(m_1) \\ + (I - U^{n_2})S_{n_1,1}(m_2) + (I - U^{n_1})(I - U^{n_2})g.$$

La norme uniforme du processus sommes partielles associé à une fonction h est de l'ordre de

$$\max_{1 \leqslant i_1 \leqslant n_1} \max_{1 \leqslant i_2 \leqslant n_2} \left| S_{i_1,i_2}(h) \right|.$$

Pour établir un principe d'invariance, on doit montrer que les termes $(I - U_1)m_1 + (I - U_2)m_2 + (I - U_1)(I - U_2)g$ ont une contribution négligeable. En posant $\mathbb{E}_R[Y] = \mathbb{E}[|Y| \mathbf{1}\{|Y| > R\}]$, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n_1 n_2} \max_{1 \leqslant i_1 \leqslant n_1} \max_{1 \leqslant i_2 \leqslant n_2} U^{i_1} \left| S_{1,i_2}(m_1) \right|^2\right] \\ \leqslant \frac{R}{n_1} + \frac{1}{n_2} \mathbb{E}_R\left[\max_{1 \leqslant i_2 \leqslant n_2} \left| S_{1,i_2}(m_1) \right|^2\right].$$

Plan

Principe d'invariance via une approximation par ortho-martingales

La condition de type Hannan : projecteurs

Définissons les projecteurs par

$$P_{\mathbf{j}} := \prod_{q=1}^{d} P_{j_q}^{(q)}, \quad \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^d,$$

où pour $l \in \mathbb{Z}$, $P_l^{(q)} : \mathbb{L}^1(\mathcal{F}) \to \mathbb{L}^1(\mathcal{F})$ est défini par

$$P_l^{(q)}(f) = \mathbb{E}_l^{(q)}[f] - \mathbb{E}_{l-1}^{(q)}[f]$$

et

$$\mathbb{E}_l^{(q)}[\cdot] = \mathbb{E}\left[\cdot \mid \bigvee_{\substack{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d \\ i_q \leqslant l}} \mathcal{F}_{\mathbf{i}}\right], q \in \{1, \ldots, d\}, l \in \mathbb{Z}.$$

La condition de type Hannan : projecteurs

Théorème (Volný, Wang, 2014, Volný, 2015)

Soit $(f \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ *un champ aléatoire, où* f *vérifie* $\mathbb{E}\left[f \mid \bigcap_{i \geqslant 1} T_q^i \mathcal{M}\right] = 0$ *pour tout* $q \in \{1, \ldots, d\}$, *est* $\mathcal{M}$*-mesurable, de carré intégrable et au moins une des transformations* $T_q, 1 \leqslant q \leqslant d$ *est ergodique. Supposons que*

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d} \|P_{\mathbf{i}}(f)\|_2 < +\infty.$$

Alors $\left(S_{\mathbf{n}}(f, \cdot)/\sqrt{\mathbf{n}}\right)_{\mathbf{n} \succcurlyeq \mathbf{1}}$ *converge en loi vers* $\sigma \cdot W$ *dans* $C([0,1]^d)$ *lorsque* $\min_{1 \leqslant q \leqslant d} n_q \to \infty$ *et* $\sigma = \sqrt{\mathbb{E}\left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d} P_{\mathbf{0}}\left(U^{\mathbf{i}} f\right)\right)^2}$.

Condition de type Maxwell et Woodroofe

Théorème (G., 2016)

Soit f une fonction $\mathcal{M}$-mesurable et de carré intégrable. On suppose que

$$\sum_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}} \frac{1}{|\mathbf{n}|^{3/2}} \left\|\mathbb{E}\left[S_{\mathbf{n}}(f) \mid \mathcal{M}\right]\right\|_2 < +\infty.$$

Alors il existe m de carré intégrable telle que $(m \circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ soit un champ de type AOM et

$$\lim_{\min \mathbf{n}\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}} \left\| \max_{\mathbf{1}\preccurlyeq\mathbf{i}\preccurlyeq\mathbf{n}} \left|S_{\mathbf{i}}(f) - S_{\mathbf{i}}(m)\right| \right\|_2 = 0.$$

En particulier, si T_1 est ergodique, $\left(S_{\mathbf{n}}(f,\cdot)/\sqrt{\mathbf{n}}\right)_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}}$ converge en loi vers $c \cdot W$ dans $C([0,1]^d)$ lorsque $\min_{1\leqslant q\leqslant d} n_q \to \infty$ où c est une constante.

Idée de démonstration (1)

Supposons qu'il existe une constante C ne dépendant que de d telle que pour tout f,

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{n}|}}\left\|\max_{1\preccurlyeq i\preccurlyeq n}|S_i(f)|\right\| \leqslant C\sum_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}}\frac{1}{|\mathbf{n}|^{3/2}}\left\|\mathbb{E}\left[S_{\mathbf{n}}(f)\mid\mathcal{M}\right]\right\|_2 .$$

On définit

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathrm{MW}} &:= \sum_{\mathbf{j}\succcurlyeq\mathbf{0}}2^{-\frac{j_1+\cdots+j_d}{2}}\left\|\mathbb{E}\left[S_{2^{j_1},\ldots,2^{j_d}}(f)\mid\mathcal{M}\right]\right\|_2\\ &\asymp\sum_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}}\frac{1}{|\mathbf{n}|^{3/2}}\left\|\mathbb{E}\left[S_{\mathbf{n}}(f)\mid\mathcal{M}\right]\right\|_2 \text{ et}\end{aligned}$$

$$\mathrm{MW} := \left\{f\in\mathbb{L}^2(\mathcal{M}), \|f\|_{\mathrm{MW}}<+\infty\right\}.$$

Alors $(\mathrm{MW}, \|\cdot\|_{\mathrm{MW}})$ est un espace de Banach.

Idée de démonstration (2)

On pose pour $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^d$, $q \in \{1, \ldots, d\}$ et U associé à $(T_1, \ldots, T_d)$,

$$P_U^{\mathbf{i}}(f) := \mathbb{E}\left[U^{\mathbf{i}} f \mid \mathcal{M}\right], \quad P_U^{\mathbf{i_q e_q}}(f) = \mathbb{E}\left[U_q^{i_q} f \mid \mathcal{M}\right].$$

Soit $q \in \{1, \ldots, d\}$. L'opérateur $P_U^{\mathbf{e_q}}$

- est ergodique en moyenne sur MW, *i.e.*,

$$\forall f \in \mathrm{MW}, \quad \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \left\| \sum_{l=0}^{N-1} P_U^{l\mathbf{e_q}}(f) \right\|_{\mathrm{MW}} = 0\ ;$$

- n'admet que 0 comme point fixe sur MW.

Par conséquent (cf. Krengel, Théorème 1.3 p. 76), le sous-espace

$$Y := \left[\prod_{q=1}^{d} \left(I - P_U^{\mathbf{e_q}}\right)\right] \mathrm{MW}$$

est dense dans $(\mathrm{MW}, \|\cdot\|_{\mathrm{MW}})$.

Idée de démonstration (3)

Toute fonction $h \in Y$ admet la décomposition ortho-martingale/cobord. On note $\mathcal{D}(h)$ l'ortho-martingale associée. L'opérateur $\mathcal{D}$ est linéaire et borné sur Y : on peut le prolonger à MW et poser $m := \mathcal{D}(f)$ à f donnée.

Pour établir l'inégalité maximale, on procède par récurrence. En dimension un, on montre que

$$\left\| \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^n} |S_i(f)| \right\|_2 \leqslant 2^{n/2+1} \left\| f - U^{-1} P_U f \right\|_2 + K 2^{n/2} \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i/2} \left\| \sum_{j=1}^{2^i - 1} P_U^j f \right\|_2 .$$

Pour passer de $n-1$ à n, on utilise

$$\begin{aligned} \left\| \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^n} |S_i(f)| \right\|_2 &\leqslant 2^{n/2+1} \left\| f - U^{-1} P_U f \right\|_2 + \left\| \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^n} \left| S_i(U^{-1} P_U f) \right| \right\|_2 \\ &\leqslant 2^{n/2+1} \left\| f - U^{-1} P_U f \right\|_2 + 2^{n/2} \left\| P_U f \right\|_2 \\ &+ \left\| \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}} \left| S_i(T^2, (I+U) U^{-1} P_U f) \right| \right\|_2 . \end{aligned}$$

Idée de démonstration (4)

En dimension 2 : on montre par récurrence sur n_2 la propriété

$$\forall n_1 \in \mathbb{N}, \forall T \text{ tel que } T_q\mathcal{M} \subset \mathcal{M}, \quad \left\| \max_{1 \leqslant i_1 \leqslant 2^{n_1}} \max_{1 \leqslant i_2 \leqslant 2^{n_2}} |S_{i_1,i_2}(f)| \right\|_2$$

$$\leqslant 2^{(n_1+n_2)/2+2} \left\| f - U_1^{-1} P_U^{\mathbf{e}_1} f \right\|_2$$

$$+ K 2^{n_1/2} 2^{n_2/2} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} 2^{-i_1/2} 2^{-i_2/2} \left\| \sum_{j_1=1}^{2^{i_1}-1} \sum_{j_2=1}^{2^{i_2}-1} P_U^{j_1,j_2} f \right\|_2 .$$

Plan

Quelques questions ouvertes

Théorème limite central sans ergodicité

Question

A-t-on le théorème limite central sur les rectangles pour les ortho-martingales lorsqu'aucune des transformations T_q n'est ergodique ?

- Si (i_k) et (j_k) sont des suites qui tendend vers l'infini, alors la suite $\left(S_{i_k,j_k}(m)/\sqrt{i_k j_k}\right)_{k\geqslant 1}$ est équi-tendue.
- On peut donc extraire une sous-suite convergente.
- La question est donc de déterminer s'il peut y avoir des lois limites différentes.

Décomposition martingale-cobord dans $\mathbb{L}^1$

Question

Si une fonction f admet la décomposition ortho-martingale/cobord dans $\mathbb{L}^1$, que faut-il rajouter de plus pour avoir le théorème limite central ?

- En dimension 1, si T est ergodique, alors la condition

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left|S_n(f)\right|/\sqrt{n} < +\infty$$

  est suffisante (**Esseen, Janson, 1984**).

- En dimension supérieure, il faut examiner la contribution des termes du type $(I - U_1)m_1$ où m_1 est $\mathcal{M}$-mesurable et $\mathbb{E}\left[m_1 \mid T_2\mathcal{M}\right] = 0$.