

# Principe d'invariance dans les espaces hölderiens

Davide GIRAUDO

Calais, Séminaire de Probabilités et Statistique, 4 février 2016

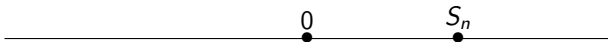
# Plan

Introduction

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  et une suite  $(X_j)_{j \geq 1}$  de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cela signifie que  $X_j$  est une fonction de  $\Omega$  à valeurs réelles.

On suppose que  $X_1$  (et donc  $X_j$ ) est centrée et de variance égale à 1. On pose  $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ .

Figure : Interprétation de  $S_n$



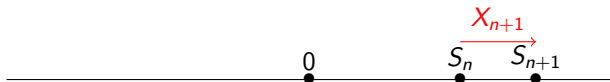
**Objectif général** : une bonne compréhension du comportement de la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  lorsque  $n$  est grand.

Par exemple, on aimerait avoir une idée de  $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leq x)$  pour un réel  $x$  donné.

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  et une suite  $(X_j)_{j \geq 1}$  de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cela signifie que  $X_j$  est une fonction de  $\Omega$  à valeurs réelles.

On suppose que  $X_1$  (et donc  $X_j$ ) est centrée et de variance égale à 1. On pose  $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ .

Figure : Interprétation de  $S_n$



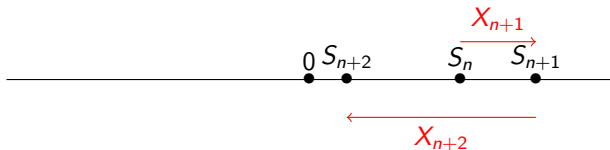
**Objectif général** : une bonne compréhension du comportement de la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  lorsque  $n$  est grand.

Par exemple, on aimerait avoir une idée de  $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leq x)$  pour un réel  $x$  donné.

On considère un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$  et une suite  $(X_j)_{j \geq 1}$  de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cela signifie que  $X_j$  est une fonction de  $\Omega$  à valeurs réelles.

On suppose que  $X_1$  (et donc  $X_j$ ) est centrée et de variance égale à 1. On pose  $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)$ .

Figure : Interprétation de  $S_n$



**Objectif général** : une bonne compréhension du comportement de la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  lorsque  $n$  est grand.

Par exemple, on aimerait avoir une idée de  $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leq x)$  pour un réel  $x$  donné.

## Le théorème limite central

- ▶ Si  $X_1 \neq 0$ , on peut montrer que pour chaque  $R$  et (presque) tout  $\omega \in \Omega$ , l'élément  $S_n(\omega)$  se trouve en dehors de  $[-R, R]$  pour une infinité d'indices  $n$ .

Pas de convergence possible pour la suite  $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$ .

# Le théorème limite central

- ▶ Si  $X_1 \neq 0$ , on peut montrer que pour chaque  $R$  et (presque) tout  $\omega \in \Omega$ , l'élément  $S_n(\omega)$  se trouve en dehors de  $[-R, R]$  pour une infinité d'indices  $n$ .

Pas de convergence possible pour la suite  $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$ .

- ▶ La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

# Le théorème limite central

- ▶ Si  $X_1 \neq 0$ , on peut montrer que pour chaque  $R$  et (presque) tout  $\omega \in \Omega$ , l'élément  $S_n(\omega)$  se trouve en dehors de  $[-R, R]$  pour une infinité d'indices  $n$ .

Pas de convergence possible pour la suite  $(S_n(\omega))_{n \geq 1}$ .

- ▶ La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

- ▶ Le *théorème limite central* fournit la convergence

$$\begin{aligned} \text{pour tout réel } x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left( \omega \mid \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \leq x \right) &= \mathbb{P}(\omega \mid N(\omega) \leq x) \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$



## Version fonctionnelle (Donsker)

On peut prendre en compte l'historique de la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$ .

On note  $S_n^{\text{pl}}$  la fonction aléatoire affine par morceaux telle que  $S_n^{\text{pl}}(k/n) = S_k = X_1 + \dots + X_k$ .

**Donsker (1951)** : pour toute fonctionnelle  $F : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , la convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ F \left( \frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\text{pl}} \right) \right] = \mathbb{E} [F(W_s)] \quad (*)$$

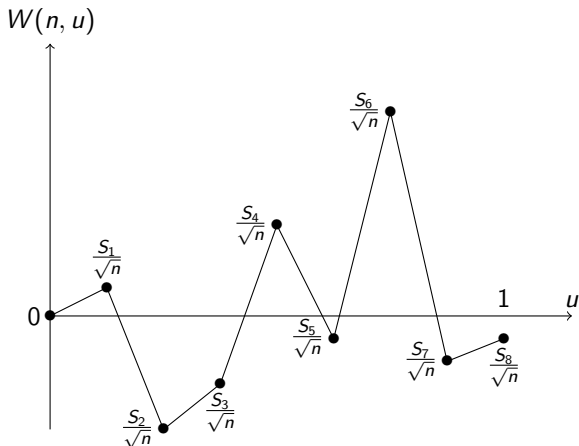
a lieu, où  $(W_s)_{s \in [0,1]}$  est un processus de Wiener (mouvement brownien standard) :  $W_s$  suit une loi normale centrée pour chaque  $s$  et la covariance entre  $W_s$  et  $W_t$  vaut  $\min\{s, t\}$ .

La convergence (\*) est appelée principe d'invariance car elle ne dépend pas de la loi de  $X_1$  (pour peu que  $X_1$  soit centrée et de variance 1).

## Illustration

On considère  $u \mapsto S_n^{\text{pl}}(u)$  la fonction aléatoire telle que  $S_n^{\text{pl}}(k/n) = S_k$  et dont le graphe est affine par morceaux et  $W(n, u) = S_n^{\text{pl}}/\sqrt{n}$ . Alors  $(W(n, \cdot))_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $W$ .

Figure : La fonction  $u \mapsto W(n, u)$  pour  $n = 8$



# Plan

Obtention du principe d'invariance hölderien

# Objectifs généraux

On aimerait étendre la convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ F \left( \frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\text{Pl}} \right) \right] = \mathbb{E} [F(W)], \quad (*)$$

à une classe de fonctionnelles aussi grande que possible.

**Idée générale** : exploiter le fait que les trajectoires d'un mouvement brownien standard sont presque sûrement hölderiennes d'exposant  $\alpha \in ]0, 1/2[$  : pour presque tout  $\omega \in \Omega$ , il existe  $C(\omega)$  telle que

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leq C(\omega) |t - s|^\alpha.$$

C'est l'approche de Lamperti (1962).

# Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$	$\ x\ _\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{ x(s) - x(t) }{ s - t ^\alpha} +  x(0)  < +\infty$	Non

# Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$	$\ x\ _\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{ x(s) - x(t) }{ s - t ^\alpha} +  x(0)  < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$		

# Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$	$\ x\ _\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{ x(s) - x(t) }{ s - t ^\alpha} +  x(0)  < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$	$\sup \left\{ \frac{ x(t) - x(s) }{ t - s ^\alpha} :  t - s  < \delta, s, t \in [0, 1] \right\} \rightarrow 0$	

# Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$	$\ x\ _\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{ x(s) - x(t) }{ s - t ^\alpha} +  x(0)  < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$	$\sup \left\{ \frac{ x(t) - x(s) }{ t - s ^\alpha} :  t - s  < \delta, s, t \in [0, 1] \right\} \rightarrow 0$	Oui



# Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$	$\ x\ _\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{ x(s) - x(t) }{ s - t ^\alpha} +  x(0)  < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$	$\sup \left\{ \frac{ x(t) - x(s) }{ t - s ^\alpha} :  t - s  < \delta, s, t \in [0, 1] \right\} \rightarrow 0$	Oui

La quantité analogue au module de continuité dans  $C[0, 1]$  est  $w_\alpha$ , défini par

$$\omega_\alpha(x, \delta) = \sup_{0 < |t-s| < \delta} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$

On cherche des conditions sur la suite  $(X_j)_{j \geq 1}$  pour que la convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[ F \left( \frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\text{pl}} \right) \right] = \mathbb{E} [F(W)] \quad (*)$$

ait lieu pour toute fonctionnelle  $F: \mathcal{H}_\alpha[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée.

## Le cas i.i.d. : une première observation

Soit  $(X_j)_j$  une suite i.i.d. vérifiant le principe d'invariance dans  $\mathcal{H}_\alpha$  (on suppose  $X_0$  centrée et de variance 1). Pour tout  $\delta > 0$ ,  
 $\omega_\alpha(n^{-1/2}S_n^{\text{pl}}, \delta) \rightarrow \omega_\alpha(W, \delta)$  et pour  $n$  tel que  $n\delta \geq 1$ ,  
 $\omega_\alpha(n^{-1/2}S_n^{\text{pl}}, \delta) \geq n^{-1/2+\alpha} \max_{1 \leq j \leq n} |X_j|$  donc pour tout  $\delta$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ n^{-1/2+\alpha} \max_{1 \leq j \leq n} |X_j| > 1 \right\} \leq \mu \{ \omega_\alpha(W, \delta) > 1 \}.$$

d'où l'on déduit

$$\mu \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} |X_j| > n^{1/2-\alpha} \right\} \rightarrow 0.$$

Par indépendance, ceci est équivalent à

$$n \cdot \mu \left\{ |X_1| > n^{1/p(\alpha)} \right\} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{p(\alpha)} = \alpha.$$

Donc la condition

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p(\alpha)} \mu \{ |X_1| > t \} = 0$$

est nécessaire.

## Le cas i.i.d. : la condition nécessaire et suffisante

**Lamperti (1962)** a montré que si  $(X_j)_{j \geq 0}$  est une suite i.i.d. centrée telle que  $X_1 \in \mathbb{L}^p$  pour un  $p > 2$ , alors le principe d'invariance a lieu dans  $\mathcal{H}_\gamma^o[0, 1]$  pour tout  $\gamma < 1/2 - 1/p$ .

## Le cas i.i.d. : la condition nécessaire et suffisante

**Lamperti (1962)** a montré que si  $(X_j)_{j \geq 0}$  est une suite i.i.d. centrée telle que  $X_1 \in \mathbb{L}^p$  pour un  $p > 2$ , alors le principe d'invariance a lieu dans  $\mathcal{H}_\gamma^o[0, 1]$  pour tout  $\gamma < 1/2 - 1/p$ .

**Račkauskas et Suquet (2003)** ont montré que pour une suite i.i.d. centrée  $(X_j)_{j \geq 1}$ , une condition nécessaire et suffisante pour obtenir le principe d'invariance dans  $\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$  est

$$t^{p(\alpha)} \mu\{|X_0| > t\} \rightarrow 0$$

avec  $1/2 - 1/p(\alpha) = \alpha$ .

## Application à la détection de point de rupture

On dispose d'un échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  indépendant et on veut déterminer s'il existe des entiers  $1 \leq k^*(n) < m^*(n) \leq n$  tels que  $\mathbb{E}[X_i] = c[k^*(n) < i \leq m^*(n)]$  où  $c \neq 0$  (existence de point de rupture). Soit  $l^*(n) := m^*(n) - k^*(n)$  la longueur de la rupture. On pose

$$UI(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|S_j - S_i - S_n \cdot (j/n - i/n)|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^\alpha}.$$

### Theorem (Račkauskas et. Suquet, 2003)

Si  $c \neq 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l^*(n)}{n} n^{\frac{1}{2-2\alpha}} = +\infty,$$

alors la suite  $(UI(n))_{n \geq 1}$  ne converge pas.

**Conséquence** : si  $t^{P(\alpha)} \mu\{|X_0| > t\} \rightarrow 0$ , et  $l^*(n)$  se comporte comme du  $n^{\frac{1-2\alpha}{2-2\alpha}}$ , on peut détecter la présence d'une rupture.

# Apport du principe d'invariance hölderien

- ▶ Application du principe d'invariance dans  $C[0, 1]$  : on ne peut détecter une rupture de longueur  $\sqrt{n}$ .
- ▶ Application du principe d'invariance dans  $\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$  :  $\sqrt{n} \cdot n^{-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}}$ .  
On a utilisé la statistique

$$\text{UI}(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i < j \leq n} \frac{|S_j - S_i - S_n \cdot (j/n - i/n)|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^\alpha}.$$

Elle correspond à la fonctionnelle

$$F(x) := \sup_{0 < s < t \leq 1} \frac{|x(t) - x(s) - x(1)(t - s)|}{|t - s|^\alpha},$$

qui est continue sur  $\mathcal{H}_\alpha$ .

# Objectifs généraux

**Objectif** : établir le principe d'invariance dans les espaces hölderiens pour des suites strictement stationnaires (*i.e.*, telles que  $(X_j)_{j \geq 1}$  et  $(X_{j+1})_{j \geq 1}$  ont la même loi).

- ▶ Donner des conditions suffisantes sur la loi commune et la dépendance de la suite.
- ▶ Justifier leur éventuelle optimalité.

## Stratégie

Pour établir le principe d'invariance dans  $C[0, 1]$ , il faut montrer deux choses.

- ▶ La convergence des lois fini-dimensionnelles : pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$  et tous  $t_1, \dots, t_d \in [0, 1]$ ,

$$\left( \frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\text{pl}}(t_i) \right)_{i=1}^d \rightarrow (W(t_i))_{i=1}^d.$$

- ▶ L'équi-tension de  $(S_n^{\text{pl}}/\sqrt{n})$  dans  $C[0, 1]$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu \left\{ \sup_{|t-s| < \delta} \frac{1}{\sqrt{n}} |S_n^{\text{pl}}(t) - S_n^{\text{pl}}(s)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Cette condition peut être remplacée par

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq j \leq n\delta} |S_j| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Les lois fini-dimensionnelles caractérisent les mesures de probabilité sur  $\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$ .



## Une norme équivalente

Soit  $D_j$  l'ensemble des nombres dyadiques de l'intervalle  $[0, 1]$  de niveau  $j$ , i.e.,

$$D_0 := \{0, 1\}, \quad D_j := \{(2l - 1)2^{-j}; 1 \leq l \leq 2^{j-1}\}, j \geq 1.$$

Si  $r \in D_j$  pour un certain  $j \geq 0$ , on définit  $r^+ := r + 2^{-j}$  et  $r^- := r - 2^{-j}$ . Pour  $r \in D_j, j \geq 1$ , soit  $\Lambda_r$  la fonction affine par morceaux dont le graphe relie les points  $(0, 0)$ ,  $(r^-, 0)$ ,  $(r, 1)$ ,  $(r^+, 0)$  et  $(1, 0)$ .

# Une norme équivalente

Soit  $j \geq 1$  et  $r \in D_j$ . On pose

$$\lambda_r(x) := x(r) - \frac{x(r^+) + x(r^-)}{2}.$$

Si  $x \in C[0, 1]$ , alors

$$x = \sum_{j \geq 0} \sum_{r \in D_j} \lambda_r(x) \Lambda_r,$$

et la convergence est uniforme sur  $[0, 1]$ .

La norme séquentielle est définie par

$$\|x\|_{\alpha}^{\text{seq}} := \sup_{j \geq 0} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(x)|.$$

Elle est équivalente à  $\|\cdot\|_{\alpha}$  (Ciesielski, 1960).

# Critère de tension

Observons que  $x \in \mathcal{H}_\alpha^o$  si et seulement si

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \sup_{j \geq J} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(x)| = 0.$$

**Proposition (A. Račkauskas, C. Suquet, 1999)**

*Une suite  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  d'éléments aléatoires de  $\mathcal{H}_\alpha^o$  (pour laquelle  $\xi_n(0) = 0$ ) est tendue si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \sup_{j \geq J} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(\xi_n)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

# Critère de tension pour le processus sommes partielles

## Proposition

Soit  $(X_j)_{j \geq 1}$  une suite strictement stationnaire centrée telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=J}^{\log_2 n} 2^j \mu \left\{ 2^{\alpha j} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n2^{-j}} |S_i| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (C)$$

Alors la suite  $(n^{-1/2} S_n^{\text{pl}})_{n \geq 1}$  est équi-tendue dans  $\mathcal{H}_\alpha^0[0, 1]$ .

## Remarque

La condition (C) implique que  $n \cdot \mu \{ |X_1| > n^{1/2-\alpha} \} \rightarrow 0$  (considérer  $j = \log_2 n$ ).

## Corollaire

Pour qu'une suite vérifie le principe d'invariance dans  $\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$ , il suffit qu'elle vérifie le théorème limite central et (C).

# Représentation des suites strictement stationnaires

- ▶ Si  $T: \Omega \rightarrow \Omega$  est une application qui préserve la mesure, alors pour toute fonction  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , la suite  $(f \circ T^j)_{j \geq 0}$  est strictement stationnaire.
- ▶ Réciproquement, toute suite strictement stationnaire  $(X_j)_{j \geq 0}$  peut être représentée sous la forme  $(f \circ T^j)_{j \geq 0}$  (i.e., telle que  $(X_j)_{j \geq 0}$  et  $(f \circ T^j)_{j \geq 0}$  ont la même loi).

Dorénavant, nous allons considérer un système dynamique  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ .

- ▶ Pour  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose  $S_n(f) := \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ .
- ▶ Le processus sommes partielles associé à  $f$  est donné par

$$S_n^{\text{pl}}(f, t) := S_{[nt]}(f) + (nt - [nt])f \circ T^{[nt]}$$

(fonction aléatoire affine par morceaux et  $S_n^{\text{pl}}(f, k/n) = S_k(f)$ ).

# Plan

Cas des martingales

# Martingales à accroissements stationnaires

Soit  $\mathcal{M}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  telle que  $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$  (ainsi,  $(T^{-i}\mathcal{M})_{i \geq 0}$  est une filtration).

On dit que  $(m \circ T^j)_{j \geq 0}$  est une suite d'accroissements d'une martingale si la fonction  $m$  est  $\mathcal{M}$ -mesurable, intégrable et  $\mathbb{E}[m \mid T\mathcal{M}] = 0$ .

Si  $(m \circ T^j)_{j \geq 0}$  est une suite d'accroissements d'une martingale telle que  $\mathbb{E}[m^2] = \sigma^2$ , alors  $m$  vérifie le principe d'invariance dans  $C[0, 1]$  (voir **Billingsley (1968)**).

L'obtention du principe d'invariance dans  $C[0, 1]$  peut se faire *via* une approximation par martingales (méthode initiée par **Gordin (1969)**).

On peut essayer la même approche dans le cadre du principe d'invariance dans les espaces hölderiens.

# Un contre-exemple

La condition nécessaire et suffisante du cas i.i.d. ne s'étend pas aux martingales.

Soit  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  $p(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$ .

## Théorème (G.)

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$  un système dynamique d'entropie strictement positive. Il existe une fonction  $m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et une sous-tribu  $\mathcal{M}$  vérifiant  $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$  et

- la suite  $(m \circ T^i)_{i \geq 0}$  est une suite d'accroissements d'une martingale par rapport à la filtration  $(T^{-i}\mathcal{M})_{i \geq 0}$ ;
- la convergence  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{p(\alpha)} \mu \{|m| > t\} = 0$  a lieu;
- la suite  $(n^{-1/2} S_n^{\text{pl}}(m))_{n \geq 1}$  n'est pas équi-tendue dans  $\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$ .



# Une condition suffisante pour les martingales

Soit  $\mathcal{M}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  telle que  $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ . Soit  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  
 $\rho(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$ .

## Théorème (G.)

Soit  $(m \circ T^j, T^{-j}\mathcal{M})_{j \geq 0}$  une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale. Supposons que  $t^{\rho(\alpha)} \mu\{|m| > t\} \rightarrow 0$  et  $\mathbb{E}[m^2 | T\mathcal{M}] \in \mathbb{L}^{\rho(\alpha)/2}$ . Alors

$$n^{-1/2} S_n^{\text{pl}}(m) \rightarrow \eta \cdot W \text{ en loi dans } \mathcal{H}_\alpha^o[0, 1], \quad (\text{HIP})$$

où  $\eta$  est indépendante du mouvement brownien  $W$ .

En particulier, (HIP) a lieu si  $m \in \mathbb{L}^{\rho(\alpha)}$ .

## En résumé

Soit  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  $p(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$ .

Dépendance de $(f \circ T^i)_{i \geq 0}$	Loi de $f$	Est-ce que $f$ vérifie le PIH?
Indépendent	$t^{p(\alpha)} \mu \{ f  > t\} \rightarrow 0$	Oui (Račkauskas, Suquet, 2003)
Accroissements d'une martingale	$t^{p(\alpha)} \mu \{ f  > t\} \rightarrow 0$	Pas nécessairement (G., 2015)
Accroissements d'une martingale	$t^{p(\alpha)} \mu \{ f  > t\} \rightarrow 0$ et $\mathbb{E}[f^2   \mathcal{T}\mathcal{M}] \in \mathbb{L}^{p(\alpha)/2}$	Oui (G., 2015)

# Idée de démonstration (1)

Il suffit de démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{J \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=J}^{\log_2 n} 2^j \mu \left\{ 2^{\alpha j} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n2^{-j}} |S_i(m)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

## Théorème (Nagaev, 2003)

Pour tout  $q > 0$ , il existe  $C(q)$  telle que si  $(S_k, \mathcal{F}_k)$  est une martingale,  $t > 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$\mu \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq t \right\} \leq C(q) \int_0^1 Q(tu) u^{q-1} du,$$

où

$$Q(u) := \mu \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > u \right\} + \mu \left\{ \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \right)^{1/2} > u \right\}.$$

## Idée de démonstration (2)

### Corollaire

Soit  $(m \circ T^j, T^{-j}\mathcal{M})_{j \geq 0}$  une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale. Pour tout  $q > 2$ , il existe une constante  $c(q)$  telle que pour tout  $t$  et tout entier  $N \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \max_{1 \leq i \leq N} |S_i(m)| > t \right\} &\leq c(q)N \int_0^1 \mu \left\{ |m| > tu\sqrt{N} \right\} u^{q-1} du \\ &+ c(q) \int_0^{+\infty} \mu \left\{ \mathbb{E} [m^2 | T\mathcal{M}] > t^2 u^2 \right\} \min \{u, u^{q-1}\} du. \end{aligned}$$

## Idée de démonstration (3)

Avec  $q > p(\alpha)$ , on obtient pour tout  $\delta$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=J}^{\log_2 n} 2^j \mu \left\{ 2^{\alpha j} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leq i \leq n2^{-j}} |S_i(m)| > \varepsilon \right\} \\ & \leq K(\alpha, \varepsilon) \delta + K(\alpha, \varepsilon) \sup_{v > n^{1/p(\alpha)} \delta} v^{p(\alpha)} \mu \{|m| > v\} \\ & + K(\alpha, \varepsilon) \left\| \mathbb{E} [m^2 | \mathcal{T}\mathcal{M}] \mathbf{1} \left\{ \mathbb{E} [m^2 | \mathcal{T}\mathcal{M}] > 2^{2J/p(\alpha)} \right\} \right\|_{p(\alpha)/2}^{p(\alpha)/2}. \end{aligned}$$

# Approximation par martingales

## Théorème (G.)

Soit  $\mathcal{M}$  une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  telle que  $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ .

Soient  $f$  une variable aléatoire  $\mathcal{M}$ -mesurable et centrée,  $\alpha \in (0, 1/2)$  and  $p(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$ . On suppose que  $f$  vérifie l'une des conditions suivantes.

- ▶ Condition de type Hannan :

$$\sum_{i \geq 0} \|\mathbb{E}[f \mid T^i \mathcal{M}] - \mathbb{E}[f \mid T^{i+1} \mathcal{M}]\|_{p(\alpha)} < +\infty$$

- ▶ Condition de type Maxwell et Woodroffe :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \|\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{M}]\|_{p(\alpha)} < +\infty.$$

Alors

$$n^{-1/2} S_n^{\text{pl}}(f) \rightarrow \eta \cdot W \text{ en loi dans } \mathcal{H}_\alpha[0, 1],$$

où  $\eta$  est indépendante du mouvement brownien  $W$ .

# Idée de démonstration sous Hannan

On pose

$$P_i(f) = \mathbb{E} [f \mid T^i \mathcal{M}] - \mathbb{E} [f \mid T^{i+1} \mathcal{M}], \quad i \geq 0.$$

On a  $f = \sum_{i \geq 0} P_i(f) = \sum_{i=0}^R P_i(f) + \sum_{i \geq R} P_i(f)$ .

- ▶ Le premier terme admet une décomposition martingale-cobord, c'est-à-dire  $\sum_{i=0}^R P_i(f) = m_R + g_R - g_R \circ T$  avec  $m_R$  et  $g_R \in \mathbb{L}^{p(\alpha)}$ .
- ▶ Pour le second, on exploite le fait que  $(P_i(f) \circ T^j)_{j \geq 0}$  est une martingale et l'inégalité

$$\left\| n^{-1/2} \left\| S_n^{\text{pl}}(P_i(f)) \right\|_{\mathcal{H}_\alpha} \right\|_1 \leq C(\alpha) \|P_i(f)\|_{p(\alpha)}.$$

## Idée de démonstration sous Maxwell-Woodroffe

Il existe une martingale approximante pour la topologie de  $C[0, 1]$  (**Peligrad et Utev, 2005**). On contrôle la norme hölderienne du processus sommes partielles pour vérifier que l'approximation fonctionne pour la topologie hölderienne :

$$\left\| n^{-1/2} \|S_n^{\text{pl}}(f)\|_{\mathcal{H}_\alpha} \right\|_1 \leq C_\alpha \left( \|f - \mathbb{E}[f \mid \mathcal{TM}]\|_{p(\alpha)} + K_\alpha \sum_{j=0}^{\log_2 n - 1} 2^{-j/2} \|\mathbb{E}[S_{2^j}(f) \mid \mathcal{TM}]\|_{p(\alpha)} \right).$$



## Quelques questions restantes (1)

Traiter le cas de modules de régularité plus généraux, du type

$$\omega_\rho(x, \delta) := \sup_{\substack{s, t \in [0, 1] \\ 0 < t - s < \delta}} \frac{|x(t) - x(s)|}{\rho(t - s)},$$

où  $\rho(u) := u^\alpha L(1/u)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1/2$  et  $L$  est à variation lente (par exemple  $\rho(u) = u^{1/2} \log(c/u)^\beta$ ,  $\beta > 1/2$ ).

Cas i.i.d. : la condition nécessaire et suffisante est (cf. **Račkauskas et Suquet, 2004**)

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \delta |X_0|^{1/\beta} \right) \right] < +\infty \text{ pour tout } \delta > 0. \quad (1)$$

## Quelques questions restantes (2)

Donner une estimation de la vitesse de convergence. Si  $\rho$  est une métrique sur les lois de probabilité de  $\mathcal{H}_\alpha[0, 1]$ , on aimerait donner une majoration de  $\rho(n^{-1/2}S_n^{\text{pl}}, W)$ .

Pas de résultats de ce type dans la littérature, même dans le cas i.i.d.

Un premier pas serait d'étudier la vitesse de convergence des modules de régularité  $\omega_\alpha$  avec

$$\omega_\alpha(x, \delta) := \sup_{\substack{s, t \in [0, 1] \\ 0 < t - s < \delta}} \frac{|x(t) - x(s)|}{|t - s|^\alpha}.$$