Un théorème limite central fonctionnel et une application à la détection de point de rupture

Davide Giraudo

Université de Rouen, Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem

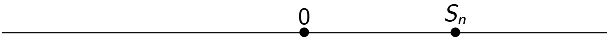
Journée des Doctorants 2015

Introduction

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une suite $(X_j)_{j \geqslant 1}$ de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cela signifie que X_j est une fonction de Ω à valeurs réelles.

On suppose que X_1 (et donc X_j) est centrée et de variance égale à 1. On pose $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.

Figure : Interprétation de S_n



Objectif général : une bonne compréhension du comportement de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque n est grand.

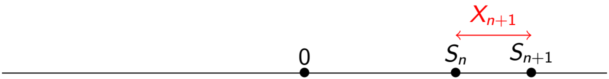
Par exemple, on aimerait avoir une idée de $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leqslant x)$ pour un réel x donné.

Introduction

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une suite $(X_j)_{j \geqslant 1}$ de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cela signifie que X_j est une fonction de Ω à valeurs réelles.

On suppose que X_1 (et donc X_j) est centrée et de variance égale à 1. On pose $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.

FIGURE : Interprétation de S_n



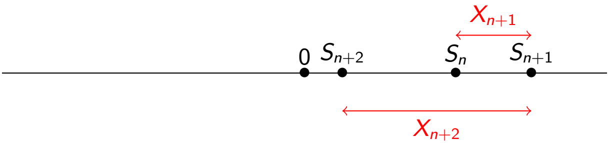
Objectif général : une bonne compréhension du comportement de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ lorsque n est grand.

Par exemple, on aimerait avoir une idée de $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leqslant x)$ pour un réel x donné.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une suite $(X_j)_{j\geqslant 1}$ de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cela signifie que X_j est une fonction de Ω à valeurs réelles.

On suppose que X_1 (et donc X_j) est centrée et de variance égale à 1. On pose $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.

Figure : Interprétation de S_n



Objectif général : une bonne compréhension du comportement de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque n est grand.

Par exemple, on aimerait avoir une idée de $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leqslant x)$ pour un réel x donné.

- Si $X_1 \neq 0$, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Donc : pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

- Si $X_1 \neq 0$, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Donc : pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

- La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

- Si $X_1 \neq 0$, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Donc : pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n\geqslant 1}$.

- La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

- Le *théorème limite central* fournit la convergence

$$\text{pour tout réel } x, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\omega \mid \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(\omega \mid N(\omega) \leqslant x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

La variable aléatoire N est dite « de loi normale centrée réduite ».

On peut prendre en compte l'historique de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour tout réel x,

$$(*)\qquad \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\omega \mid \max_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{|S_j(\omega)|}{\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\mathbb{P}(\omega \mid \max_{0\leqslant s\leqslant 1}|W_s(\omega)|\leqslant x),$$

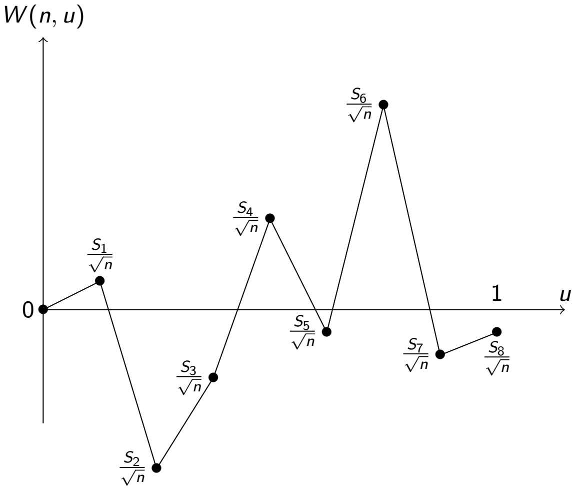
où $(W_s)_{s\in[0,1]}$ est un processus de Wiener (mouvement brownien) : W_s suit une loi normale centrée pour chaque s et la covariance entre W_s et W_t vaut $\min\{s,t\}$.

La convergence (*) est appelée principe d'invariance car elle ne dépend pas de la loi de X_1 (pour peu que X_1 soit centrée et de variance 1).

Pourquoi « fonctionnel » ?

On considère $u \mapsto W(n,u)$ une fonction aléatoire dont le graphe est polygonal par morceaux et $W(n,j/n) = S_j/\sqrt{n}$. Alors « $W(n,\cdot)$ converge en loi vers W. ».

FIGURE : La fonction $u \mapsto W(n,u)$ pour $n = 8$



Une propriété du processus de Wiener

Le processus de Wiener a des trajectoires hölderiennes : pour tout $\alpha \in]0, 1/2[$ et (presque) tout $\omega \in \Omega$, il existe une constante $C(\omega, \alpha)$ telle que pour tous $s, t \in [0, 1]$,

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leqslant C(\omega, \alpha) |t - s|^\alpha .$$

C'est dû au fait que W_s suit la même loi que $\sqrt{s} W_1$, *i.e.*, pour chaque x, $\mathbb{P}(W_s \leqslant x) = \mathbb{P}(\sqrt{s} W_1 \leqslant x)$.

On s'intéresse à la convergence de $W(n, \cdot)$ vue commme une fonction hölderienne. Plus précisément, on cherche à établir la convergence

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ j-i \leqslant n\delta}} \frac{|S_j - S_i|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^\alpha} \leqslant x\right) \underset{n \to \infty}{\to} \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{0 \leqslant s < t \leqslant 1 \\ t-s \leqslant \delta}} \frac{|W_t - W_s|}{(t-s)^\alpha} \leqslant x\right) \text{ pour tout } x,$$

pour tout $0 < \delta < 1$.

On dispose d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendant et on veut déterminer s'il existe des entiers $1 \leqslant k^*(n) < m^*(n) \leqslant n$ tels que $\mathbb{E}[X_i] = c[k^*(n) < i \leqslant m^*(n)]$ où $c \neq 0$ (existence de point de rupture). Soit $l^*(n) := m^*(n) - k^*(n)$ la longueur de la rupture. On pose

$$\mathrm{UI}(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{|S_j - S_i - S_n \cdot (j/n - i/n)|}{\left(\frac{(j-i)}{n}\right)^{\alpha}}.$$

Théorème (A. Račkauskas, C. Suquet (2003))

Si $c \neq 0$ *et*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{l^*(n)}{n} n^{\frac{1}{2-2\alpha}} = +\infty,$$

alors la suite $(\mathrm{UI}(n))_{n \geqslant 1}$ *ne converge pas.*

Conséquence : si $l^*(n)$ se comporte comme du $n^{\frac{1-2\alpha}{2-2\alpha}}$, on peut détecter la présence d'une rupture.

On cherche une condition sur la loi de X_1 pour avoir la convergence

$$(\mathrm{C}(\alpha)) \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n\\ j-i\leqslant n\delta}} \frac{|S_j - S_i|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^{\alpha}} \leqslant x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{P}\left(\sup_{\substack{0\leqslant s<t\leqslant 1\\ t-s\leqslant\delta}} \frac{|W_t - W_s|}{(t-s)^{\alpha}} \leqslant x\right)$$

pour tous $x \in \mathbb{R}$,$\delta \in]0,1[$.

Théorème (A. Račkauskas, C. Suquet (2003))

Soit $p(\alpha) := 1/(1/2-\alpha)$. La convergence $(C(\alpha))$ a lieu si et seulement si

$$\lim_{t\to+\infty} t^{p(\alpha)}\mathbb{P}(|X_1| > t) = 0.$$

On dit que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale si pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire S_n est centrée et minimise $\mathrm{Var}(S_{n+1} - Z)$.

On note $X_j := S_j - S_{j-1}$. On suppose que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement stationnaire, *i.e.*, $(X_1, \ldots, X_j)$ a la même loi que $(X_2, \ldots, X_{j+1})$ pour tout j.

Exemples :

- $(X_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite indépendante et identiquement distrbuée, centrée et de variance finie.
- $X_j = \varepsilon_{j-1}\varepsilon_j$, où $(\varepsilon_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite indépendante et identiquement distribuée, centrée et de variance finie. Ce n'est pas une suite indépendante.

On suppose que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $(S_n)_{n \geqslant 1}$ est une martingale et $(X_j)_{j \geqslant 0}$ est strictement stationnaire.

Théorème (G.)

Si $\mathbb{E}\,|X_1|^{\frac{1}{1/2-\alpha}} < +\infty$, *alors la convergence*

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ j-i \leqslant n\delta}} \frac{|S_j - S_i|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^{\alpha}} \leqslant x\right) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leqslant s < t \leqslant 1} \frac{|W_t - W_s|}{(t-s)^{\alpha}} \leqslant x\right)$$

a lieu pour tous $x \in \mathbb{R}$ *et* $\delta \in]0,1]$.

Ce n'est plus nécessairement vrai si on suppose seulement que $t^{\frac{1}{1/2-\alpha}}\,\mathbb{P}(|X_1| > t) \to 0$.

Perspectives

- Donner une vitesse de convergence pour

$$\mathrm{UI}(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{|S_j - S_i - S_n \cdot (j/n - i/n)|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^{\alpha}}.$$

- Étendre le résultat des martingales par approximation.

- Donner une vitesse de convergence pour

$$\mathrm{UI}(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{|S_j - S_i - S_n \cdot (j/n - i/n)|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^{\alpha}}.$$

- Étendre le résultat des martingales par approximation.

Merci de votre attention !