Principe d'invariance dans les espaces hölderiens

Davide Giraudo

Rencontre Martingales, chaînes de Markov et Systèmes dynamiques,
16 mars 2016

Plan

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une suite $(X_j)_{j\geqslant 1}$ de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cela signifie que X_j est une fonction de Ω à valeurs réelles.

On suppose que X_1 (et donc X_j) est centrée et de variance égale à 1. On pose $S_n(\omega) := X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)$.
Objectif général : une bonne compréhension du comportement de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque n est grand.

Par exemple, on aimerait avoir une idée de $\mathbb{P}(\omega \mid S_n(\omega) \leqslant x)$ pour un réel x donné.

Le théorème limite central

- Si $X_1 \neq 0$, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

Le théorème limite central

- Si $X_1 \neq 0$, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

- La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

Le théorème limite central

- Si $X_1 \neq 0$, on peut montrer que pour chaque R et (presque) tout $\omega \in \Omega$, l'élément $S_n(\omega)$ se trouve en dehors de $[-R, R]$ pour une infinité d'indices n.
  Pas de convergence possible pour la suite $(S_n(\omega))_{n \geqslant 1}$.

- La *loi des grands nombres* dit que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0 \text{ pour (presque) tout } \omega \in \Omega.$$

- Le *théorème limite central* fournit la convergence

$$\text{pour tout réel } x, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\omega \mid \frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(\omega \mid N(\omega) \leqslant x)$$
$$= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

Version fonctionnelle (Donsker)

On peut prendre en compte l'historique de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

On note S_n^{pl} la fonction aléatoire affine par morceaux telle que $S_n^{\mathrm{pl}}(k/n) = S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

Donsker (1951) : pour toute fonctionelle $F\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$, la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[F\left(W_s\right)\right] \qquad (*)$$

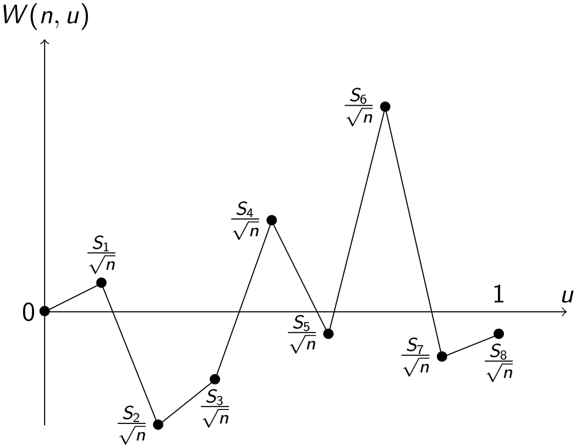
a lieu, où $(W_s)_{s\in[0,1]}$ est un processus de Wiener (mouvement brownien standard) : W_s suit une loi normale centrée pour chaque s et la covariance entre W_s et W_t vaut $\min\{s,t\}$.

La convergence (*) est appelée principe d'invariance car elle ne dépend pas de la loi de X_1 (pour peu que X_1 soit centrée et de variance 1).

Illustration

On considère $u \mapsto S_n^{\mathrm{pl}}(u)$ la fonction aléatoire telle que $S_n^{\mathrm{pl}}(k/n) = S_k$ et dont le graphe est affine par morceaux et $W(n,u) = S_n^{\mathrm{pl}}/\sqrt{n}$. Alors $(W(n,\cdot))_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers W..

Figure : La fonction $u \mapsto W(n,u)$ pour $n = 8$



Plan

Obtention du principe d'invariance höldérien

Objectifs généraux

On aimerait étendre la convergence

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[F\left(W\right)\right], \qquad (*)$$

à une classe de fonctionnelles aussi grande que possible.

Idée générale : exploiter le fait que les trajectoires d'un mouvement brownien standard sont presque sûrement hölderiennes d'exposant $\alpha \in]0, 1/2[$: pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $C(\omega)$ telle que

$$|W_t(\omega) - W_s(\omega)| \leqslant C(\omega) \, |t - s|^{\alpha} .$$

C'est l'approche de Lamperti (1962).

Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0,1]$	$\lVert x \rVert_\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{\lvert x(s)-x(t)\rvert}{\lvert s-t\rvert^\alpha} + \lvert x(0)\rvert < +\infty$	Non

Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_{\alpha}[0,1]$	$\Vert x \Vert_{\alpha} := \sup_{s \neq t} \frac{\vert x(s)-x(t)\vert}{\vert s-t\vert^{\alpha}} + \vert x(0)\vert < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_{\alpha}^{o}[0,1]$		

Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0,1]$	$\|x\|_\alpha := \sup_{s\neq t} \frac{\|x(s)-x(t)\|}{\|s-t\|^\alpha} + \|x(0)\| < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_\alpha^o[0,1]$	$\sup\left\{\frac{\|x(t)-x(s)\|}{\|t-s\|^\alpha} : \|t-s\| < \delta, s,t \in [0,1]\right\} \to 0$	

Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0,1]$	$\|x\|_\alpha := \sup_{s\neq t} \frac{\lvert x(s)-x(t)\rvert}{\lvert s-t\rvert^\alpha} + \lvert x(0)\rvert < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_\alpha^o[0,1]$	$\sup\left\{ \frac{\lvert x(t)-x(s)\rvert}{\lvert t-s\rvert^\alpha} : \lvert t-s\rvert < \delta, s,t \in [0,1] \right\} \to 0$	Oui

Les espaces de Hölder

Espace	Définition	Séparable
$\mathcal{H}_\alpha[0,1]$	$\lVert x \rVert_\alpha := \sup_{s\neq t} \frac{\lvert x(s)-x(t)\rvert}{\lvert s-t\rvert^\alpha} + \lvert x(0)\rvert < +\infty$	Non
$\mathcal{H}_\alpha^o[0,1]$	$\sup\left\{\frac{\lvert x(t)-x(s)\rvert}{\lvert t-s\rvert^\alpha} : \lvert t-s\rvert < \delta, s,t \in [0,1]\right\} \to 0$	Oui

On cherche des conditions sur la suite $(X_j)_{j\geqslant 1}$ pour que la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[F\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[F(W)\right] \qquad (*)$$

aie lieu pour toute fonctionnelle $F\colon \mathcal{H}_\alpha[0,1] \to \mathbb{R}$ continue et bornée.

Le cas i.i.d. : une première observation

Soit $(X_j)_j$ une suite i.i.d. vérifiant le principe d'invariance dans $\mathcal{H}_\alpha$ (on suppose X_0 centrée et de variance 1).
La quantité analogue au module de continuité dans $C[0,1]$ est ω_α, défini par

$$\omega_\alpha(x,\delta) = \sup_{0<|t-s|<\delta} \frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\alpha}.$$

Pour tout $\delta > 0$, $\omega_\alpha(n^{-1/2}S_n^{\mathrm{pl}},\delta) \to \omega_\alpha(W,\delta)$ et pour n tel que $n\delta \geqslant 1$, $\omega_\alpha(n^{-1/2}S_n^{\mathrm{pl}},\delta) \geqslant n^{-1/2+\alpha}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|$ donc pour tout δ,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu\left\{n^{-1/2+\alpha}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| > 1\right\} \leqslant \mu\left\{\omega_\alpha(W,\delta) > 1\right\}.$$

d'où l'on déduit

$$\mu\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j| > n^{1/2-\alpha}\right\} \to 0.$$

Le cas i.i.d. : une première observation (2)

Par indépendance, ceci est équivalent à

$$n \cdot \mu \left\{ |X_1| > n^{1/p(\alpha)} \right\} \to 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{p(\alpha)} = \alpha.$$

Donc la condition

$$\lim_{t \to +\infty} t^{p(\alpha)} \mu \left\{ |X_1| > t \right\} = 0$$

est nécessaire.

Le cas i.i.d. : la condition nécessaire et suffisante

Lamperti (1962) a montré que si $(X_j)_{j \geqslant 0}$ est une suite i.i.d. centrée telle que $X_1 \in \mathbb{L}^p$ pour un $p > 2$, alors le principe d'invariance a lieu dans $\mathcal{H}_\gamma^o[0,1]$ pour tout $\gamma < 1/2 - 1/p$.

Le cas i.i.d. : la condition nécessaire et suffisante

Lamperti (1962) a montré que si $(X_j)_{j \geqslant 0}$ est une suite i.i.d. centrée telle que $X_1 \in \mathbb{L}^p$ pour un $p > 2$, alors le principe d'invariance a lieu dans $\mathcal{H}^o_\gamma[0,1]$ pour tout $\gamma < 1/2 - 1/p$.

Račkauskas et Suquet (2003) ont montré que pour une suite i.i.d. centrée $(X_j)_{j \geqslant 1}$, une condition nécessaire et suffisante pour obtenir le principe d'invariance dans $\mathcal{H}^o_\alpha[0,1]$ est

$$t^{p(\alpha)} \mu \{|X_0| > t\} \to 0$$

avec $1/2 - 1/p(\alpha) = \alpha$.

Application à la détection de point de rupture

On dispose d'un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendant et on veut déterminer s'il existe des entiers $1 \leqslant k^*(n) < m^*(n) \leqslant n$ tels que $\mathbb{E}[X_i] = c[k^*(n) < i \leqslant m^*(n)]$ où $c \neq 0$ (existence de point de rupture). Soit $l^*(n) := m^*(n) - k^*(n)$ la longueur de la rupture. On pose

$$\mathrm{UI}(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{|S_j - S_i - S_n \cdot (j/n - i/n)|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^{\alpha}}.$$

Theorem (Račkauskas et. Suquet, 2003)

Si $c \neq 0$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{l^*(n)}{n} n^{\frac{1}{2-2\alpha}} = +\infty,$$

alors la suite $(\mathrm{UI}(n))_{n \geqslant 1}$ ne converge pas.

Conséquence : si $t^{p(\alpha)} \mu \{|X_0| > t\} \to 0$, et $l^*(n)$ se comporte comme du $n^{\frac{1-2\alpha}{2-2\alpha}}$, on peut détecter la présence d'une rupture.

Apport du principe d'invariance hölderien

- Application du principe d'invariance dans $C[0,1]$: on ne peut détecter une rupture de longueur $\sqrt{n}$.
- Application du principe d'invariance dans $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$: $\sqrt{n} \cdot n^{-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}}$.
  On a utilisé la statistique

  $$\mathrm{UI}(n) := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{|S_j - S_i - S_n \cdot (j/n - i/n)|}{\left(\frac{j-i}{n}\right)^\alpha}.$$

  Elle correspond à la fonctionnelle

  $$F(x) := \sup_{0 < s < t \leqslant 1} \frac{|x(t) - x(s) - x(1)(t-s)|}{|t-s|^\alpha},$$

  qui est continue sur $\mathcal{H}_\alpha$.

Objectifs généraux

Objectif : établir le principe d'invariance dans les espaces hölderiens pour des suites strictement stationnaires (*i.e.*, telles que $(X_j)_{j\geqslant 1}$ et $(X_{j+1})_{j\geqslant 1}$ ont la même loi).

- Donner des conditions suffisantes sur la loi commune et la dépendance de la suite.
- Justifier leur éventuelle optimalité.

Stratégie

Pour établir le principe d'invariance dans $C[0,1]$, il faut montrer deux choses.

- La convergence des lois fini-dimensionnelles : pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et tous $t_1, \dots, t_d \in [0,1]$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n^{\mathrm{pl}}(t_i) \right)_{i=1}^{d} \to (W(t_i))_{i=1}^{d}.$$

- L'équi-tension de $(S_n^{\mathrm{pl}}/\sqrt{n})$ dans $C[0,1]$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to +\infty} \mu \left\{ \sup_{|t-s|<\delta} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| S_n^{\mathrm{pl}}(t) - S_n^{\mathrm{pl}}(s) \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

  Cette condition peut être remplacée par

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \limsup_{n \to +\infty} \mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant j \leqslant n\delta} |S_j| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Les lois fini-dimensionnelles caractérisent les mesures de probabilité sur $\mathcal{H}_{\alpha}^{o}[0,1]$.

Une norme équivalente

Soit D_j l'ensemble des nombres dyadiques de l'intervalle $[0,1]$ de niveau j, *i.e.*,

$$D_0 := \{0,1\}, \quad D_j := \left\{(2l-1)2^{-j}; 1 \leqslant l \leqslant 2^{j-1}\right\}, j \geqslant 1.$$

Si $r \in D_j$ pour un certain $j \geqslant 0$, on définit $r^+ := r + 2^{-j}$ et $r^- := r - 2^{-j}$. Pour $r \in D_j$, $j \geqslant 1$, soit Λ_r la fonction affine par morceaux dont le graphe relie les points $(0,0)$, $(r^-,0)$, $(r,1)$, $(r^+,0)$ et $(1,0)$.

Une norme équivalente

Soit $j \geqslant 1$ et $r \in D_j$. On pose

$$\lambda_r(x) := x(r) - \frac{x(r^+) + x(r^-)}{2}.$$

Si $x \in C[0,1]$, alors

$$x = \sum_{j \geqslant 0} \sum_{r \in D_j} \lambda_r(x) \Lambda_r,$$

et la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

La norme séquentielle est définie par

$$\|x\|_{\alpha}^{\text{seq}} := \sup_{j \geqslant 0} 2^{j\alpha} \max_{r \in D_j} |\lambda_r(x)|.$$

Elle est équivalente à $\|\cdot\|_{\alpha}$ (**Ciesielski, 1960**).

Critère de tension

Observons que $x \in \mathcal{H}_\alpha^o$ si et seulement si

$$\lim_{J\to+\infty} \sup_{j\geqslant J} 2^{j\alpha} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(x)| = 0.$$

Proposition (A. Račkauskas, C. Suquet, 1999)

Une suite $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments aléatoires de $\mathcal{H}_\alpha^o$ (pour laquelle $\xi_n(0) = 0$) est tendue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{J\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu \left\{ \sup_{j\geqslant J} 2^{j\alpha} \max_{r\in D_j} |\lambda_r(\xi_n)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Critère de tension pour le processus sommes partielles

Proposition

Soit $(X_j)_{j\geqslant 1}$ *une suite strictement stationnaire centrée telle que*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{J\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \sum_{j=J}^{\log_2 n} 2^j \mu \left\{ 2^{\alpha j} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leqslant i\leqslant n2^{-j}} |S_i| > \varepsilon \right\} = 0. \quad \text{(C)}$$

Alors la suite $\left(n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}\right)_{n\geqslant 1}$ *est équi-tendue dans* $\mathcal{H}_\alpha^o[0,1]$.

Remarque

La condition (C) *implique que* $n \cdot \mu \left\{ |X_1| > n^{1/2-\alpha} \right\} \to 0$ *(considérer* $j = \log_2 n$*).*

Corollaire

Pour qu'une suite vérifie le principe d'invariance dans $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$, *il suffit qu'elle vérifie le théorème limite central et* (C).

Représentation des suites strictement stationnaires

- Si $T\colon \Omega \to \Omega$ est une application qui préserve la mesure, alors pour toute fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, la suite $\left(f \circ T^j\right)_{j \geqslant 0}$ est strictement stationnaire.
- Réciproquement, toute suite strictement stationnaire $(X_j)_{j \geqslant 0}$ peut être représentée sous la forme $\left(f \circ T^j\right)_{j \geqslant 0}$ (*i.e.*, telle que $(X_j)_{j \geqslant 0}$ et $\left(f \circ T^j\right)_{j \geqslant 0}$ ont la même loi).

Dorénavant, nous allons considérer un système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$.

- Pour $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, on pose $S_n(f) := \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$.
- Le processus sommes partielles associé à f est donné par

$$S_n^{\mathrm{pl}}(f, t) := S_{[nt]}(f) + (nt - [nt]) f \circ T^{[nt]}$$

(fonction aléatoire affine par morceaux et $S_n^{\mathrm{pl}}(f, k/n) = S_k(f)$).

Plan

Cas des martingales

Martingales à accroissements stationnaires

Soit $\mathcal{M}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ (ainsi, $(T^{-i}\mathcal{M})_{i \geqslant 0}$ est une filtration).
On dit que $\left(m \circ T^j\right)_{j \geqslant 0}$ est *une suite d'accroissements d'une martingale* si la fonction m est $\mathcal{M}$-mesurable, intégrable et $\mathbb{E}\left[m \mid T\mathcal{M}\right] = 0$.

Si $\left(m \circ T^j\right)_{j \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale telle que $\mathbb{E}\left[m^2\right] = \sigma^2$, alors m vérifie le principe d'invariance dans $C[0,1]$ (voir **Billingsley (1968)**).

L'obtention du principe d'invariance dans $C[0,1]$ peut se faire *via* une approximation par martingales (méthode initiée par **Gordin (1969)**).
On peut essayer la même approche dans le cadre du principe d'invariance dans les espaces höldériens.

Un contre-exemple

La condition nécessaire et suffisante du cas i.i.d. ne s'étend pas aux martingales.

Soit $\alpha \in (0, 1/2)$, $p(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$.

Théorème (G.)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ *un système dynamique d'entropie strictement positive. Il existe une fonction* $m \colon \Omega \to \mathbb{R}$ *et une sous-tribu* $\mathcal{M}$ *vérifiant* $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ *et*

- *la suite* $(m \circ T^i)_{i \geqslant 0}$ *est une suite d'accroissements d'une martingale par rapport à la filtration* $(T^{-i}\mathcal{M})_{i \geqslant 0}$*;*
- *la convergence* $\lim_{t \to +\infty} t^{p(\alpha)} \mu \{|m| > t\} = 0$ *a lieu;*
- *la suite* $(n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(m))_{n \geqslant 1}$ *n'est pas équi-tendue dans* $\mathcal{H}_\alpha^o[0, 1]$.

Une condition suffisante pour les martingales

Soit $\mathcal{M}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Soit $\alpha \in (0, 1/2)$, $p(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$.

Théorème (G.)

Soit $(m \circ T^j, T^{-j}\mathcal{M})_{j \geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale. Supposons que $t^{p(\alpha)}\mu\{|m| > t\} \to 0$ et $\mathbb{E}[m^2 \mid T\mathcal{M}] \in \mathbb{L}^{p(\alpha)/2}$. Alors

$$n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(m) \to \eta \cdot W \text{ en loi dans } \mathcal{H}_\alpha^o[0,1], \tag{HIP}$$

où η est indépendente du mouvement brownien W.

En particulier, (HIP) a lieu si $m \in \mathbb{L}^{p(\alpha)}$.

En résumé

Soit $\alpha \in (0, 1/2)$, $p(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$.

Dépendance de $(f \circ T^i)_{i \geqslant 0}$	**Loi de f**	**Est-ce que f vérifie le PIH?**
Indépendent	$t^{p(\alpha)} \mu \{\lvert f \rvert > t\} \to 0$	Oui (Račkauskas, Suquet, 2003)
Accroissements d'une martingale	$t^{p(\alpha)} \mu \{\lvert f \rvert > t\} \to 0$	Pas nécessairement (G., 2015)
Accroissements d'une martingale	$t^{p(\alpha)} \mu \{\lvert f \rvert > t\} \to 0$ et $\mathbb{E}\left[f^2 \mid T\mathcal{M}\right] \in \mathbb{L}^{p(\alpha)/2}$	Oui (G., 2015)

Idée de démonstration (1)

Il suffit de démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{J \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \sum_{j=J}^{\log_2 n} 2^j \mu \left\{ 2^{\alpha j} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i \leqslant n 2^{-j}} |S_i(m)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Théorème (Nagaev, 2003)

Pour tout $q > 0$, il existe $C(q)$ telle que si $(S_k, \mathcal{F}_k)$ est une martingale, $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\mu \left\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \geqslant t \right\} \leqslant C(q) \int_0^1 Q(tu)\, u^{q-1} \mathrm{d}u,$$

où

$$Q(u) := \mu \left\{ \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |X_k| > u \right\} + \mu \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1} \right] \right)^{1/2} > u \right\}.$$

Idée de démonstration (2)

Corollaire

Soit $(m \circ T^j, T^{-j}\mathcal{M})_{j \geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale. Pour tout $q > 2$, il existe une constante $c(q)$ telle que pour tout t et tout entier $N \geqslant 1$,

$$\mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |S_i(m)| > t \right\} \leqslant c(q) N \int_0^1 \mu \left\{ |m| > tu\sqrt{N} \right\} u^{q-1} \mathrm{d}u$$
$$+ c(q) \int_0^{+\infty} \mu \left\{ \mathbb{E}\left[m^2 \mid T\mathcal{M} \right] > t^2 u^2 \right\} \min \left\{ u, u^{q-1} \right\} \mathrm{d}u.$$

Idée de démonstration (3)

Avec $q > p(\alpha)$, on obtient pour tout δ

$$\sum_{j=J}^{\log_2 n} 2^j \mu \left\{ 2^{\alpha j} \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i \leqslant n2^{-j}} |S_i(m)| > \varepsilon \right\}$$

$$\leqslant K(\alpha,\varepsilon)\delta + K(\alpha,\varepsilon) \sup_{v > n^{1/p(\alpha)}\delta} v^{p(\alpha)} \mu\left\{|m| > v\right\}$$

$$+ K(\alpha,\varepsilon) \left\| \mathbb{E}\left[m^2 \mid T\mathcal{M}\right] \mathbf{1}\left\{ \mathbb{E}\left[m^2 \mid T\mathcal{M}\right] > 2^{2J/p(\alpha)} \right\} \right\|_{p(\alpha)/2}^{p(\alpha)/2}.$$

Approximation par martingales

Théorème (G.)

Soit $\mathcal{M}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $T\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.
Soient f une variable aléatoire $\mathcal{M}$-mesurable et centrée, $\alpha \in (0, 1/2)$ and $p(\alpha) := (1/2 - \alpha)^{-1}$. On suppose que f vérifie l'une des conditions suivantes.

- *Condition de type Hannan :*

$$\sum_{i \geqslant 0} \left\| \mathbb{E}\left[f \mid T^i\mathcal{M}\right] - \mathbb{E}\left[f \mid T^{i+1}\mathcal{M}\right] \right\|_{p(\alpha)} < +\infty$$

- *Condition de type Maxwell et Woodroofe :*

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}} \left\| \mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{M}\right] \right\|_{p(\alpha)} < +\infty.$$

Alors

$$n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(f) \to \eta \cdot W \text{ en loi dans } \mathcal{H}_\alpha[0, 1],$$

où η est indépendante du mouvement brownien W.

Idée de démonstation sous Hannan

On pose

$$P_i(f) = \mathbb{E}\left[f \mid T^i\mathcal{M}\right] - \mathbb{E}\left[f \mid T^{i+1}\mathcal{M}\right], \quad i \geqslant 0.$$

On a $f = \sum_{i \geqslant 0} P_i(f) = \sum_{i=0}^{R} P_i(f) + \sum_{i \geqslant R} P_i(f)$.

- Le premier terme admet une décomposition martingale-cobord, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{R} P_i(f) = m_R + g_R - g_R \circ T$ avec m_R et $g_R \in \mathbb{L}^{p(\alpha)}$.
- Pour le second, on exploite le fait que $(P_i(f) \circ T^j)_{j \geqslant 0}$ est une martingale et l'inégalité

$$\left\| n^{-1/2} \left\| S_n^{\mathrm{pl}}(P_i(f)) \right\|_{\mathcal{H}_\alpha} \right\|_1 \leqslant C(\alpha) \left\| P_i(f) \right\|_{p(\alpha)}.$$

Idée de démonstration sous Maxwell-Woodroofe

Il existe une martingale approximante pour la topologie de $C[0,1]$ (**Peligrad et Utev, 2005**). On contrôle la norme hölderienne du processus sommes partielles pour vérifier que l'approximation fonctionne pour la topologie hölderienne :

$$\left\| n^{-1/2} \left\| S_n^{\mathrm{pl}}(f) \right\|_{\mathcal{H}_\alpha} \right\|_1 \leqslant$$

$$C_\alpha \left(\left\| f - \mathbb{E}\left[f \mid T\mathcal{M} \right] \right\|_{p(\alpha)} + K_\alpha \sum_{j=0}^{\log_2 n - 1} 2^{-j/2} \left\| \mathbb{E}\left[S_{2^j}(f) \mid T\mathcal{M} \right] \right\|_{p(\alpha)} \right).$$

Modules de régularité plus généraux

Traiter le cas de modules de régularité plus généraux, du type

$$\omega_\rho(x,\delta) := \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ 0<t-s<\delta}} \frac{|x(t)-x(s)|}{\rho(t-s)},$$

où $\rho(u) := u^{\alpha} L(1/u)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$ et L est à variation lente .

Cas i.i.d. : la condition nécessaire et suffisante pour le principe d'invariance dans $\mathcal{H}_\rho$ est (cf. **Račkauskas et Suquet, 2004**)

$$\forall A > 0, \lim_{t\to+\infty} t \cdot \mu \left\{ |X_0| > A t^{1/2} \rho(1/t) \right\} = 0.$$

Si $\rho(u) = u^{1/2} \log(c/u)^{\beta}$, $\beta > 1/2$, ceci devient

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\delta\, |X_0|^{1/\beta}\right)\right] < +\infty \text{ pour tout } \delta > 0.$$

Critère de tension

Proposition

Soit $(f \circ T^i)_{i \geqslant 0}$ *une suite strictement stationnaire telle que pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{J \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \sum_{j=J}^{\log_2 n} 2^j \mu \left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant n 2^{-j}} |S_i(f)| > \varepsilon n^{1/2} \rho\left(2^{-j}\right) \right\} = 0.$$

Alors la suite $(n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(f))_{n \geqslant 1}$ *est équi-tendue dans* $\mathcal{H}_\rho$.

Cas des martingales

Soit $\rho(t) := t^\alpha L(1/t)$ où $0 < \alpha \leqslant 1/2$ et L est une fonction à variation lente.

Théorème (G.)

Soit $(m \circ T^i)_{i \geqslant 0}$ une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale telle que pour tout $A > 0$,

$$\lim_{t \to +\infty} t \cdot \mu \left\{ |X_0| > A t^{1/2} \rho(1/t) \right\} = 0.$$

- *Si $\alpha < 1/2$ on suppose que* $\sum_{j \geqslant 1} 2^j \mu \left\{ \mathbb{E}\left[m^2 \mid T\mathcal{M} \right] > 2^{j(1-2\alpha)} L\left(2^j\right)^2 \right\} < \infty$;
- *si $\alpha = 1/2$ et $L(t) = \log(ct)^\beta$, on suppose que pour tout A,* $\mathbb{E}\left[\exp\left(A\,|m|^{2/(2\beta-1)} \right) \right] < \infty$.

Alors

$$n^{-1/2} S_n^{\mathrm{pl}}(m) \to \eta \cdot W \text{ en loi dans } \mathcal{H}_\rho^o[0,1], \tag{1}$$

où η est indépendante du mouvement brownien W.

Vitesse de convergence

Donner une estimation de la vitesse de convergence. Si ρ est une métrique sur les lois de probabilité de $\mathcal{H}_\alpha[0,1]$, on aimerait donner une majoration de $\rho\left(n^{-1/2}S_n^{\mathrm{pl}}, W\right)$.

Pas de résultats de ce type dans la littérature, même dans le cas i.i.d.

Un premier pas serait d'étudier la vitesse de convergence des modules de régularité ω_α avec

$$\omega_\alpha(x,\delta) := \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ 0<t-s<\delta}} \frac{|x(t)-x(s)|}{|t-s|^\alpha},$$

ou leur équivalent défini à partir de la norme séquentielle.