Conditions d'intégrabilité du cobord et de la fonction de transfert pour les théorèmes limites

Davide Giraudo

Rouen, Groupe de travail en probabilités et théorie ergodique
20 mars 2017

Suites strictement stationnaires

- On cherche à comprendre le comportement asymptotique des sommes partielles de suites de variables aléatoires.

- On se focalisera sur les suites strictement stationnaires, c'est-à-dire telles que $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $(X_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}}$ ont la même loi.

- Dans la suite, on supposera que $X_j = f \circ T^j$ où $T\colon \Omega \to \Omega$ preserve la mesure. Le quadruplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ est appelé système dynamique.

- Soit $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement stationnaire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\Omega' := \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ définie par $f(\omega) = (X_j(\omega))_{j\in\mathbb{Z}}$. On pose

$$\mu(A) := \mathbb{P}\{\omega, f(\omega) \in A\}, A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right)$$

 et $T\colon (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. Les suites $(X_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ et $\left(f \circ T^j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ ont la même loi.

'

Le théorème ergodique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique, $S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} U^i f$ où $U^i f(\omega) = f\left(T^i \omega\right)$.

Théorème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique. Si $f \in \mathbb{L}^1$, alors la suite $(S_n(f)/n)_{n \geqslant 1}$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]$, où

$$\mathcal{I} = \left\{A \in \mathcal{F} \mid T^{-1}A = A\right\}.$$

Extensions

- Si $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}] = 0$, on cherche une autre normalisation pour avoir une convergence vers une limite non nulle.
- Estimer la vitesse de convergence (sous des hypothèses de dépendence sur la suite $\left(f \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$).

Loi des grands nombres/Baum-Katz

Définition

Soit $1 < p < 2$. *On dit que la fonction* $f \in \mathbb{L}^p$ *vérifie la* p*-loi des grands nombres si pour tout* $\alpha \in [1/p, 1]$ *et tout* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{p\alpha-2} \mu \left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i(f)| > n^\alpha \varepsilon \right\} < \infty. \qquad \text{(pLGN)}$$

Remarque

En prenant $\alpha = 1/p$, *la convergence* (pLGN) *équivaut à*

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \mu \left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^N} |S_i(f)| > 2^{N/p} \varepsilon \right\} < \infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, $N^{-1/p} \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |S_i(f)| \to 0$ *presque sûrement.*

Théorème limite central

Définition

On dit que la fonction centrée $f \in \mathbb{L}^2$ *vérifie le théorème limite central (TLC) si la suite* $\left(n^{-1/2} S_n(f)\right)_{n \geqslant 1}$ *converge en loi vers* $\eta \cdot N$, *où* η *est* $\mathcal{I}$*-mesurable,* N *est indépendante de* $\mathcal{I}$ *et suit une loi normale.*

Le TLC a lieu si $\left(f \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est indépendante, centrée et $f \in \mathbb{L}^2$.

Théorème limite central fonctionnel

- Étant donnée une fonction f, on définit

$$W_n(f)(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} S_k(f) & \text{si } t = k/n, k \in \{0, \dots, n\}, \\ \text{interpolation affine} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Soit $C[0,1]$ l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme.

Définition

On dit que la fonction centrée $f \in \mathbb{L}^2$ vérifie le théorème limite central fonctionnel (TLCF) si la suite $(W_n(f))_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers $\eta \cdot W$ dans $C[0,1]$, où η est $\mathcal{I}$-mesurable et W est une mouvement brownien standard et est indépendant de $\mathcal{I}$.

Le TLCF a lieu si $\left(f \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est indépendante, centrée et $f \in \mathbb{L}^2$.

Loi des logarithmes itérés

Définition

On dit que la fonction centrée $f \in \mathbb{L}^2$ *vérifie la loi des logarithmes itérés (LLI) s'il existe une constante* $C(f)$ *telle que pour presque tout* $\omega \in \Omega$*,*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n(f)(\omega)}{\sqrt{n \log\log n}} = -C(f) \text{ et } \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n(f)(\omega)}{\sqrt{n \log\log n}} = C(f).$$

La LLI a lieu si $\left(f \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est indépendante, centrée et $f \in \mathbb{L}^2$.

Martingales

Soit $\mathcal{F}_0$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_0 \subset T^{-1}\mathcal{F}_0$.

Définition

On dit que $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ *est une suite d'accroissements d'une martingale si* m *est intégrable,* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* $\mathbb{E}\left[m \mid T\mathcal{F}_0\right] = 0$.

Martingales et théorèmes limites

Soit $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ une suite d'accroissements d'une martingale.

- Si $\mathbb{E}\left[|m|^p\right] < +\infty$ pour $1 < p < 2$, alors $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ vérifie la p-loi des grands nombres.
- Si $\mathbb{E}\left[m^2\right] < +\infty$, alors $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ vérifie le théorème limite central fonctionnel.
- Si $\mathbb{E}\left[m^2\right] < +\infty$ et T est ergodique (*i.e.*, les éléments de $\mathcal{I}$ sont de probabilité 0 ou 1), alors $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ vérifie la loi des logarithmes itérés.

Décomposition martingale-cobord

But : étendre les résultats valables pour les martingales à une classe plus grande de suites stationnaires. On suppose que

$$f = m + \underbrace{g - g \circ T}_{\text{cobord}},$$

où $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale de carré intégrable et g est $\mathcal{F}$-mesurable. Alors

$$S_n(f) = S_n(m) + g - g \circ T^n.$$

Par conséquent, si $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est telle que $a_n \to +\infty$, alors

$\left((g - g \circ T^n) / a_n\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 en probabilité.

Cas favorable: $g \in \mathbb{L}^2$

On suppose que

$$f = m + g - g \circ T,$$

où $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale de carré intégrable et g est $\mathcal{F}$-mesurable. Si $g \in \mathbb{L}^2$, alors $t^2 \mu\left\{|g| > t\right\} \to 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left\{|g| > \sqrt{n}\right\} < +\infty$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|g \circ T^j\right| \to 0 \text{ en probabilité et}$$

$$\frac{\left|g \circ T^n\right|}{\sqrt{n \log \log n}} \to 0 \text{ presque sûrement.}$$

$\Rightarrow$ le TLCF et la LIL.

Pour la p-loi des grands nombres, il suffit d'avoir $g \in \mathbb{L}^p$ car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{p\alpha-2} \mu\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|g - g \circ T^i\right| > 2\varepsilon n^\alpha\right\} \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p\alpha-1} \mu\left\{|g| > \varepsilon n^\alpha\right\}.$$

Condition nécessaire et suffisante pour la décomposition martingale-cobord

Définition

Une fonction f *admet la décomposition martingale-cobord dans* $\mathbb{L}^p$ *s'il existe deux fonctions* m *et* $g \in \mathbb{L}^p$ *telles que* $f = m + g - g \circ T$, m *est* $\mathcal{F}_0$*-mesurable et* $\mathbb{E}\left[m \mid T\mathcal{F}_0\right] = 0$*.*

La fonction g *est appelée fonction de transfert.*

Théorème (Cuny *et al.*, (2014))

Soit $1 < p < +\infty$*. Une fonction* $f \in \mathbb{L}^p$, $\mathcal{F}_0$*-mesurable et centrée admet la décomposition martingale-cobord dans* $\mathbb{L}^p$ *si et seulement si* $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|\mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_p < +\infty$*.*

Idée de démonstration

- Si $f = m + g - g \circ T$, alors $S_n(f) = S_n(m) + g - g \circ T^n$. Pour $i \geqslant 1$, $\mathbb{E}\left[U^i m \mid \mathcal{F}_0\right] = U^i \mathbb{E}\left[m \mid T^i \mathcal{F}_0\right] = 0$ donc

  $$\left\|\mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_p \leqslant \|m\|_p + \left\|\mathbb{E}\left[g - g \circ T^n \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_p \leqslant \|m\|_p + 2\|g\|_p.$$

Idée de démonstration

- Si $f = m + g - g \circ T$, alors $S_n(f) = S_n(m) + g - g \circ T^n$. Pour $i \geqslant 1$, $\mathbb{E}\left[U^i m \mid \mathcal{F}_0\right] = U^i \mathbb{E}\left[m \mid T^i \mathcal{F}_0\right] = 0$ donc
$$\|\mathbb{E}[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0]\|_p \leqslant \|m\|_p + \|\mathbb{E}[g - g \circ T^n \mid \mathcal{F}_0]\|_p \leqslant \|m\|_p + 2\|g\|_p.$$

- Soient
$$R_k := \frac{\mathbb{E}[Uf \mid \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[S_{k+1}(f) \mid \mathcal{F}_0]}{k},$$
$$m_k := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\{\mathbb{E}[S_i(f) \mid \mathcal{F}_0] - \mathbb{E}[S_i(f) \mid T\mathcal{F}_0]\} \text{ et}$$
$$g_k := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}[S_i(f) \mid T\mathcal{F}_0].$$
Alors
$$f = m_k + (I - U) g_k + R_k$$
et $\|R_k\|_p \to 0$. On extrait de $(m_k)_{k\geqslant 1}$ et $(g_k)_{k\geqslant 1}$ des sous-suites faiblement convergentes vers m et g.

Position du problème

Soit $f \in \mathbb{L}^2$. On s'intéresse au cas où $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_q < +\infty$ pour $1 < q < 2$ ou $1 < q < p$ pour la p-loi des grands nombres. On a la décomposition

$$f = m + g - g \circ T$$

où $\left(m \circ T^i\right)_{i\geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale et $m, g \in \mathbb{L}^q$.

Question

Quel est le plus petit r tel que $g - g \circ T \in \mathbb{L}^r$ garantisse : le TLCF, la LLI ou la p-loi des grands nombres ?

Pour le TLCF et la LLI, résultat positif

Théorème (Volný, Samek (2000))

Soient $1 < q < 2$ *et* $f \in \mathbb{L}^2$ *telle que* $f = m + g - g \circ T$, *où* $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ *est une suite d'accroissements d'une martingale de carré intégrable. On suppose que*

- $g \in \mathbb{L}^q$ *et*
- $g - g \circ T \in \mathbb{L}^r$ *pour un* $r \geqslant (q+2)/q$.

Alors f *vérifie le théorème limite central fonctionnel et la loi des logarithmes itérés.*

Pour le TLCF et la LLI, contre-exemple

Théorème (Volný, Samek (2000))

Pour tous q *et* r *tels que* $1 < q < 2 < r$ *et*

$$r < \frac{q-1}{q-3/2},$$

il existe une fonction g *telle que* $g \in \mathbb{L}^q$, $g - g \circ T \in \mathbb{L}^r$ *mais* $m + g - g \circ T$ *ne vérifie ni le TLCF ni la LLI (pour toute une suite d'accroissements d'une martingale de carré intégrable* $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$*).*

Motivations

Question

Que se passe-t-il si $g \in \mathbb{L}^q$ et $g - g \circ T \in \mathbb{L}^r$ pour

$$\frac{r-1}{r-3/2} < q < \frac{r+2}{r} \ ?$$

Question

Qu'en est-il de la p-loi des grands nombres ?

Espaces $\mathbb{L}^{p,\infty}$

Soit $p > 1$.

- On note $\mathbb{L}^{p,\infty}$ l'espace des variables aléatoires X telles que $\sup_{t>0} t^p \mu\left\{|X| > t\right\} < +\infty$.
- On note $\mathbb{L}^{p,\infty}_0$ l'espace des variables aléatoires X telles que $\lim_{t\to+\infty} t^p \mu\left\{|X| > t\right\} = 0$.

Soit $a_n := 2^{pn} \mu\left\{|X| > 2^n\right\}$.

$$X \in \mathbb{L}^{p,\infty} \Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 0} a_n < +\infty;$$

$$X \in \mathbb{L}^{p,\infty}_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0;$$

$$X \in \mathbb{L}^{p} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} a_n < +\infty.$$

Norme sur $\mathbb{L}^{p,\infty}$

On pose

$$\|X\|_{p,\infty} := \sup \left\{ \mathbb{E}\left[|X| \mathbf{1}_A\right] \mu(A)^{1/p-1}, A \in \mathcal{F}, \mu(A) > 0 \right\}.$$

Il existe C_p telle que pour toute variable aléatoire X,

$$\frac{1}{C_p} \|X\|_{p,\infty} \leqslant \left(\sup_{t>0} t^p \mu\{|X| > t\} \right)^{1/p} \leqslant C_p \|X\|_{p,\infty}.$$

Résultat sur le TLCF

Théorème (G., 2016)

Soient $1 < q < 2$, $q' = q/(q-1)$, $\mathcal{F}_0$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\mathcal{F}_0 \subset T^{-1}\mathcal{F}_0$ *et* f *une fonction* $\mathcal{F}_0$*-mesurable de* $\mathbb{L}_0^{q',\infty}$ *telle que*

1. $\sup_{n\geqslant 1} \left\|\mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_{q,\infty} < +\infty$ *et*
2. $\sup_{n\geqslant 1} \left\|(I-U)\,\mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_{q',\infty} < +\infty$.

Alors f *vérifie le théorème limite central fonctionnel.*

Loi des logarithmes itérés

Théorème (G., 2016)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ *un système dynamique ergodique. Soient* $1 < q < 2$, $q' = q/(q-1)$, $\mathcal{F}_0$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\mathcal{F}_0 \subset T^{-1}\mathcal{F}_0$ *et* f *une fonction* $\mathcal{F}_0$*-mesurable de* $\mathbb{L}^q$ *telle que*

1. $\sup_{n\geqslant 1} \left\|\mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_q < +\infty$ *et*
2. $\sup_{n\geqslant 1} \left\|(I-U)\,\mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_{q'} < +\infty$.

Alors f *vérifie la loi des logarithmes itérés.*

Optimalité

Théorème (G., 2016)

Pour tous q *et* r *tels que* $1 < q < 2 < r$ *et*

$$r < \frac{q}{q-1},$$

il existe une fonction g *telle que* $g \in \mathbb{L}^q$, $g - g \circ T \in \mathbb{L}^r$ *mais* $m + g - g \circ T$ *ne vérifie ni le TLCF ni la LLI (pour toute une suite d'accroissements d'une martingale de carré intégrable* $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$*).*

Idée de démonstration TLCF (1)

Pour le TLCF : la décomposition

$$f = m + g - g \circ T$$

a lieu où $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale, $g \in \mathbb{L}_0^{q,\infty}$ et $g - g \circ T \in \mathbb{L}_0^{q/(q-1);\infty}$. Il suffit de montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|g \circ T^i\right| \to 0 \text{ en probabilité.}$$

Soit $K(n) := \left[n^{1-q/2}\right]$. Alors

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|g \circ T^i\right| \leqslant \max_{1 \leqslant u \leqslant [n/K(n)]+1} \left|g \circ T^{K(n)u}\right| \\ + \max_{1 \leqslant u \leqslant [n/K(n)]+1} \max_{uK(n) \leqslant i < (u+1)K(n)} \left|g \circ T^i - g \circ T^{uK(n)}\right|.$$

Idée de démonstration TLCF (2)

Soit $K(n) := \left[n^{1-q/2}\right]$. Tout se ramène à montrer que

$$A_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant u \leqslant [n/K(n)]+1} \left|g \circ T^{K(n)u}\right| \xrightarrow{\mu} 0 \text{ et}$$

$$B_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant u \leqslant [n/K(n)]+1} \max_{uK(n) \leqslant i < (u+1)K(n)} \left|g \circ T^i - g \circ T^{uK(n)}\right| \xrightarrow{\mu} 0.$$

Or

$$\mu\{A_n > \varepsilon\} \leqslant ([n/K(n)] + 1)\, \mu\left\{|g| > \varepsilon\sqrt{n}\right\} \leqslant \kappa n^{q/2} \mu\left\{|g| > \varepsilon\sqrt{n}\right\} \to 0.$$

Idée de démonstration TLCF (3)

On note

$$M(h) := \sup_{n \geqslant 1} \frac{|S_n(h)|}{n}.$$

Pour $p > 1$, $h \in \mathbb{L}_0^{p,\infty} \Leftrightarrow M(h) \in \mathbb{L}_0^{p,\infty}$.

$$B_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1 \leqslant u \leqslant [n/K(n)]+1} \max_{uK(n) \leqslant i < (u+1)K(n)} \left| g \circ T^i - g \circ T^{uK(n)} \right|.$$

$$\begin{aligned}
\mu\{B_n > \varepsilon\} &\leqslant ([n/K(n)] + 1)\, \mu \left\{ \max_{1 \leqslant i < K(n)} \left| g \circ T^i - g \right| > \varepsilon \sqrt{n} \right\} \\
&\leqslant \kappa n^{q/2} \mu \left\{ \max_{1 \leqslant i < K(n)} \frac{\left| g \circ T^i - g \right|}{i} > \varepsilon K(n)^{-1} \sqrt{n} \right\} \\
&\leqslant \kappa n^{q/2} \mu \left\{ M(g - g \circ T) > \kappa' n^{\frac{q}{2} - \frac{1}{2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Idée de démonstration LLI

On a la décomposition $f = m + g - g \circ T$ où $\left(m \circ T^i\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite d'accroissements d'une martingale, $g \in \mathbb{L}^q$ et $g - g \circ T \in \mathbb{L}^{q'}$. On pose

$$m_n := \sum_{i=1}^{n} \left[i^{\frac{2}{q}-1} \right]$$

et on montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu \left\{ \frac{1}{\sqrt{m_n \log \log m_n}} \max_{1 \leqslant i \leqslant \left[n^{2/q-1} \right]} \left| g \circ T^{m_n+i} \right| > \varepsilon \right\} < +\infty.$$

Loi des grands nombres

Théorème (G., 2016)

Soient $1 < q < p < 2$, $q' = q/(q-p+1)$, $\mathcal{F}_0$ *une sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *telle que* $\mathcal{F}_0 \subset T^{-1}\mathcal{F}_0$ *et* f *une fonction* $\mathcal{F}_0$*-mesurable de* $\mathbb{L}_0^q$ *telle que*

1. $\sup_{n \geqslant 1} \left\| \mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right] \right\|_q < +\infty$ *et*
2. $\sup_{n \geqslant 1} \left\| (I-U)\,\mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right] \right\|_{q'} < +\infty$.

Alors pour tous $\alpha \in [1/p, 1]$ *et* $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{p\alpha-2} \mu\left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i(f)| > n^{\alpha}\varepsilon \right\} < \infty.$$

Décalages de Bernoulli

Soient

- $\Omega_j := \{0,1\}$ muni de la mesure μ_j donnée par $\mu_j\{0\} = \mu_j\{1\} = 1/2$;
- $\Omega := \prod_{j\in\mathbb{Z}} \Omega_j$ muni de la tribu et de la mesure produit ;
- $T\left((x_j)_{j\in\mathbb{Z}}\right) := (x_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}}$;
- $\mathcal{F}_0$ est la plus petite tribu rendant mesurable les projections $\pi_i\colon (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mapsto x_i$, $i \leqslant 0$.

On étudie le comportement asymptotique des sommes partielles de la suite strictement stationnaire $(f\circ T^n)_{n\geqslant 0}$ où

$$f\circ T^n\left((x_j)_{j\in\mathbb{Z}}\right) = h\left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-1} x_{n-j}\right) - \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Résultat pour les décalages de Bernoulli

Soit

$$f \circ T^n \left((x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \right) = h \left(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k-1} x_{n-j} \right) - \int_0^1 h(x) \, \mathrm{d}x.$$

Théorème (G, 2016)

Soit $h \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction centrée telle que pour un* $q \in]1,2[$, $t^{q/(q-1)} \lambda \{x \mid |h(x)| > t\} \to 0$ *et pour un* $\delta > 0$,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|h(x) - h(y)|^q}{|x-y|} \left(\log \frac{1}{|x-y|} \right)^{q-1+\delta} \mathrm{d}x \mathrm{d}y < \infty.$$

Alors f *vérifie le principe d'invariance et la loi des logarithmes itérés.*

Perspectives

- Extension aux cobords fractionnaires (définition de $(I-U)^{\alpha}$ à l'aide du développement en série entière de $(1-x)^{\alpha}$).

- Loi des grands nombres pour les champs aléatoires.