Inégalités de déviation pour les martingales et ortho-martingales

Davide GIRAUDO

LMRS, Université de Rouen

Rennes, Séminaire de Probabilités, 13 mars 2017

Plan

Objectif

Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathcal{F}_i)_{i \geqslant 0}$ *une filtration : pour tout* $i \geqslant 0$, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{i+1}$ *et* $\mathcal{F}_i$ *est une sous-tribu de* $\mathcal{F}$. *On dit que la suite de variables aléatoires réelles* $(S_i)_{i \geqslant 1}$ *est une martingale pour la filtration* $(\mathcal{F}_i)_{i \geqslant 0}$ *si*

1. *pour tout* $i \geqslant 1$, S_i *est intégrable et* $\mathcal{F}_i$*-mesurable et*
2. *pour tout* $i \geqslant 1$, $\mathbb{E}\left[S_i \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] = S_{i-1}$.

On dit que la suite de variables aléatoires réelles $(X_i)_{i \geqslant 1}$ *est une suite d'accroissements d'une martingale pour la filtration* $(\mathcal{F}_i)_{i \geqslant 0}$ *si*

1. *pour tout* $i \geqslant 1$, X_i *est intégrable et* $\mathcal{F}_i$*-mesurable et*
2. *pour tout* $i \geqslant 1$, $\mathbb{E}\left[X_i \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] = 0$.

Objectif : contrôler pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$ la quantité

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| > x\right\}.$$

Quelques résultats existants

- **Hoeffding (1962), Laib (1999)** : s'il existe $C > 0$ telle que $|X_i| \leqslant C$ presque sûrement pour tout i, alors

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} |S_i| > x\right\} \leqslant 2\exp\left(-\frac{x^2}{2nC^2}\right).$$

- **Burkholder (1973)** : pour tout $p > 2$, il existe $C = C(p)$ telle que pour toute suite d'accroissements d'une martingale $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i\geqslant 0}$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p\right] \leqslant C\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_i|^p\right] + C\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]\right)^{p/2}\right].$$

- **Burkholder (1973)** : pour tout $p \leqslant 2$, il existe $K(p)$ telle que pour toute suite d'accroissements d'une martingale $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i\geqslant 0}$,

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^p\right] \leqslant K(p)\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_i|^p\right].$$

Inégalité de Nagaev

Théorème (Nagaev (2003))

Soit $q > 0$, $C(q) := e^{3qe^{q+1}-q-1}$. *Pour toute martingale* $(S_n, \mathcal{F}_n)$, *l'inégalité suivante a lieu,*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k \geqslant t\right\} \leqslant C(q)\int_0^1 Q\left(tu\right)u^{q-1}\mathrm{d}u,$$

où

$$Q(u) := \mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k| > u\right\} + \mathbb{P}\left\{\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right]\right)^{1/2} > u\right\}$$

et $X_k = S_k - S_{k-1}$, $S_0 = 0$.

Inégalité de déviation

Théorème (G.)

Soit p et q des réels tels que $p < q$. Il existe des constantes $C = C(p,q)$ et $c = c(p,q)$ telles que pour toute suite d'accroissements d'une martingale $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i \geqslant 1}$, tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| > x\right\} \leqslant C \int_0^1 \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |X_i| > cxu\right\} u^{q-1} \mathrm{d}u \\ + C \int_0^1 \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] > cx^p u^p\right\} u^{q-1} \mathrm{d}u,$$

où $S_i = \sum_{k=1}^i X_k$.

Idée de démonstration (1)

On commence par montrer que pour tout $x > 0$, $\beta > 1$ et $0 < \delta < \beta - 1$,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i| > \beta x\right\} \leqslant K(p)\frac{p\delta^p}{(\beta-\delta-1)^p\,(p-1)}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i| > x\right\}$$
$$+\,\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i| > \delta x\right\} + \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] > \delta^p x^p\right\}.$$

Pour cela, on pose pour $A_1 = B_1 = C_1 = \emptyset$ et pour $i \geqslant 2$,

$$A_i = \left\{x < \max_{1\leqslant k\leqslant i-1}|S_i| \leqslant \beta x\right\},$$

$$B_i = \left\{\max_{1\leqslant k\leqslant i-1}|X_k| \leqslant \delta x\right\},$$

$$C_i = \left\{\sum_{k=1}^{i}\mathbb{E}\left[|X_k|^p \mid \mathcal{F}_{k-1}\right] \leqslant \delta^p x^p\right\}.$$

Idée de démonstration (2)

On pose

$$Y_i = \mathbf{1}_{A_i}\mathbf{1}_{B_i}\mathbf{1}_{C_i}X_i.$$

Alors $\mathbb{E}\left[Y_i \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] = 0$ et

$$\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|S_i| > \beta x\right\} \cap \left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|X_i| \leqslant \delta x\right\}$$
$$\cap\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] \leqslant \delta^p x^p\right\} \subset \left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{i}Y_k\right| > (\beta-\delta-1)\,x\right\}.$$

Puis on montre que

$$((\beta-\delta-1)\,x)^p\,\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{i}Y_k\right| > (\beta-\delta-1)\,x\right\} \leqslant \frac{pK(p)}{p-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[|Y_i|^p\right]$$
$$\leqslant \frac{pK(p)}{p-1}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| > x\right\}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{C_i}\mathbb{E}\left[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}\right]}_{\leqslant \delta^p x^p}\right].$$

Cas stationnaire

- On suppose que $X_i = f \circ T^i$, où $T \colon \Omega \to \Omega$ préserve la probabilité $\mathbb{P}$.
- On pose $Uf(\omega) = f(T\omega)$, $S_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$.
- On suppose que $\mathcal{F}_i = T^{-i}\mathcal{F}_0$ et $T\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$. Ainsi, $\mathbb{E}\left[|X_i|^p \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] = U^i \mathbb{E}\left[|m|^p \mid T\mathcal{F}_0\right]$.

Théorème (G.)

Soient p et q tels que $1 < p < \min(2, q)$. Il existe des constantes $C = C(p,q)$ et $C' = C'(p,q)$ telles que pour toute suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale $\left(m \circ T^i, T^{-i}\mathcal{F}_0\right)_{i \geqslant 0}$,

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i(m)| > n^{1/p} x\right\} \leqslant Cn \int_0^1 \mathbb{P}\left\{|m| > n^{1/p} xu\right\} u^{q-1} \mathrm{d}u$$

$$+ C \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}\left[|m|^p \mid T\mathcal{F}_0\right] > u^p x^p\right\} \min\left\{u^{q-1}, u^{p-1}\right\} \mathrm{d}u$$

$$\leqslant C' \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{|m| > ux\right\} \min\left\{u^{q-1}, u^{p-1}\right\} \mathrm{d}u.$$

Espaces $\mathbb{L}^{p,\infty}$

Soit $p > 2$.

- On note $\mathbb{L}^{p,\infty}$ l'espace des variables aléatoires X telles que $\sup_{t>0} t^p \mathbb{P}\{|X| > t\} < +\infty$.
- On note $\mathbb{L}_0^{p,\infty}$ l'espace des variables aléatoires X telles que $\lim_{t\to+\infty} t^p \mathbb{P}\{|X| > t\} = 0$.

Soit $a_n := 2^{pn}\mathbb{P}\{|X| > 2^n\}$.

$$X \in \mathbb{L}^{p,\infty} \Leftrightarrow \sup_{n\geqslant 0} a_n < +\infty;$$

$$X \in \mathbb{L}_0^{p,\infty} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0;$$

$$X \in \mathbb{L}^p \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 0} a_n < +\infty.$$

Le cas $p < 2$

On cherche à contrôler $\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n} |S_i(m)| > 2^n x\right\}$ à l'aide d'hypothèses sur la loi de m et de ses moments conditionnels.

Théorème

Soit $\left(m \circ T^i, T^{-i}\mathcal{F}_0\right)$ *une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale et* $p < 2$*. Si* $m \in \mathbb{L}^p$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n(p-1)}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n} |S_i(m)| > 2^n x\right\} = 0.$$

Cas où $m \in \mathbb{L}^{p,\infty}$, $p > 2$

Soit

$$P_n(x) := \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant 2^n} |S_i(m)| > 2^n x\right\}.$$

Proposition (G.)

Soit $p > 2$. Il existe une constante C ne dépendant que de p telle que si $\left(m \circ T^i, T^{-i}\mathcal{F}_0\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale alors pour tout $x > 0$,

$$\sup_{n \geqslant 1} 2^{np/2} P_n(x) \leqslant C \sup_{t>0} t^{p/2+1} \mathbb{P}\left\{|m| > t\right\} x^{-p/2-1} + C \sup_{t>0} t^{p/2} \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}\left[|m|^2 \mid T\mathcal{F}_0\right] > t\right\} x^{-p},$$

$$\sup_{n \geqslant 1} 2^{np/2} P_n(x) \leqslant C \sup_{t>0} t^{p} \mathbb{P}\left\{|m| > t\right\} x^{-p}.$$

Cas où $m \in \mathbb{L}_0^{p,\infty}$

Soit

$$P_n(x) := \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant 2^n} |S_i(m)| > 2^n x\right\}.$$

Proposition (G.)

Soit $p > 2$. Si $\left(m \circ T^i, T^{-i}\mathcal{F}_0\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale telle que $\lim_{t \to +\infty} t^{p/2+1}\mathbb{P}\{|m| > t\} = 0$ *et* $\mathbb{E}\left[|m|^2 \mid \mathcal{F}_0\right] \in \mathbb{L}_0^{p/2,\infty}$*, alors pour tout $x > 0$,*

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{np/2} P_n(x) = 0. \qquad (*)$$

En particulier, (*) a lieu si $m \in \mathbb{L}_0^{p,\infty}$.

Cas où $m \in \mathbb{L}^p$

Soit

$$P_n(x) := \mathbb{P}\left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^n} |S_i(m)| > 2^n x \right\}.$$

Proposition

Soit $p > 2$. Il existe une constante C ne dépendant que de p telle que si $\left(m \circ T^i, T^{-i}\mathcal{F}_0\right)_{i \geqslant 0}$ est une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale alors pour tout $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{np/2} P_n(x) \leqslant C x^{-p/2-1} \mathbb{E}\left[|m|^{p/2+1}\right] + C x^{-p} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[m^2 \mid T\mathcal{F}_0\right]^{p/2}\right],$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{np/2} P_n(x) \leqslant C x^{-p} \mathbb{E}\left[|m|^p\right].$$

Remarques

Soit

$$p_n := 2^{np/2}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}|S_i(m)| > 2^n x\right\}.$$

- En adaptant la construction de **Lesigne et Volný (2000)**, on peut montrer que pour toute suite $(R_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $R_n \to +\infty$, il existe une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale $\left(m\circ T^i\right)_{i\geqslant 0}$ telle que $m\in\mathbb{L}^p$ et la suite $(R_n p_n)_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers zéro.

- Le caractère borné de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ a été établi par **Lesigne et Volný (2000)** sans hypothèse de stationnarité (avec des accroissements bornés dans $\mathbb{L}^p$).

- Dans le cas i.i.d. et $p>2$, le terme en variance conditionnelle n'impose aucune restriction. On peut en fait contrôler la suite $\left(2^{n(p-1)}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant 2^n}|S_i(m)| > 2^n x\right\}\right)_{n\geqslant 1}$ si $m\in\mathbb{L}^{p,\infty}$, $m\in\mathbb{L}^{p,\infty}_0$ ou $m\in\mathbb{L}^p$.

Plan

Martingales à valeurs dans des espaces de Banach

Espace de Banach r-lisse

Définition (Pisier, 1975)

Un espace de Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ est dit r-lisse ($1 < r \leqslant 2$) s'il existe une norme équivalente $\|\cdot\|$ telle que

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t^r} \sup\left\{\|x+ty\| + \|x-ty\| - 2 : \|x\| = \|y\| = 1\right\} < \infty.$$

Exemples

- Tout espace de Hilbert est 2-lisse.
- Pour tout espace mesurable $(X, \mathcal{A}, \mu)$, l'espace $\mathbb{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est $\min(p, 2)$-lisse.

Espace de Banach (r, D)-lisse

Assouad (1975) : si B est un espace de Banach r-lisse et séparable, alors il existe une constante D telle que pour toute suite d'accroissements d'une martingale $(X_i)_{i \geqslant 1}$ à valeurs dans B,

$$\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i\right\|_B^r\right] \leqslant D \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\|X_i\|_B^r\right]. \qquad (*)$$

Définition

Un espace de Banach séparable $(B, \|\cdot\|_B)$ est (r, D)-lisse $(1 < r \leqslant 2)$ si $(B, \|\cdot\|_B)$ est r-lisse et toute suite d'accroissements d'une martingale $(X_i)_{i \geqslant 1}$ à valeurs dans B vérifie $(*)$.

Exemple

Un espace de Hilbert séparable est $(2, 1)$-lisse.

Inégalité de déviation

Théorème (G.)

Soit $(B, \|\cdot\|_B)$ un espace de Banach (r, D)-lisse, avec $1 < r \leqslant 2$. Pour tout $1 < p \leqslant r$ et $q > 0$, il existe deux constantes C et c ne dépendant que de q et D telles pour tout toute suite d'accroissements d'une martingale $(X_i, \mathcal{F}_i)_{i \geqslant 0}$, l'inégalité a lieu pour tous $n \geqslant 1$ et $x > 0$:

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|S_i\|_B > x\right\} \leqslant C \int_0^1 \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|X_i\|_B > cxu\right\} u^{q-1} \mathrm{d}u + C \int_0^1 \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\|X_i\|_B^p \mid \mathcal{F}_{i-1}\right] > cx^p u^p\right\} u^{q-1} \mathrm{d}u,$$

où $S_i = \sum_{k=1}^i X_k$.

Une application

Théorème (G.)

Soit $\left(m \circ T^{i}, T^{-i}\mathcal{F}_0\right)$ *une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale à valeur dans un espace de Banach séparable* r*-lisse* B*. Soit* $1 < p < r$*. Si* $m \in \mathbb{L}^p$*, alors*

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{n(p-1)} \mathbb{P}\left\{ \max_{1 \leqslant i \leqslant 2^n} \left\| S_i\left(m\right) \right\|_B > 2^n x \right\} = 0.$$

Plan

Orthomartingales

Contexte

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé.
- Soit $d \geqslant 2$; pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, T_i est une application bijective, bi-mesurable et préservant la mesure.
- On suppose que $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$.
- Pour $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$, on note $T^{\mathbf{i}} := T_1^{i_1} \circ \cdots \circ T_d^{i_d}$ et on dit que T est une action de $\mathbb{Z}^d$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.
- On définit l'ordre coordonnée par coordonnée : $\mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{j}$ si et seulement si $i_q \leqslant j_q$ pour tout $q \in \{1, \ldots, d\}$.

Filtrations commutantes

- Soit $\mathcal{F}_{\mathbf{0}}$ une sous-tribu telle que pour tout $q \in \{1, \dots, d\}$, $T_q \mathcal{F}_{\mathbf{0}} \subset \mathcal{F}_{\mathbf{0}}$.
- Ainsi, on définit une filtration par l'égalité $\mathcal{F}_{\mathbf{i}} := T^{-\mathbf{i}} \mathcal{F}_{\mathbf{0}}$, $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d$.

Définition

Si pour tous $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^d$ *et tout variable aléatoire intégrable* Y,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{\mathbf{k}}\right] \mid \mathcal{F}_{\mathbf{l}}\right] = \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{\min\{\mathbf{k},\mathbf{l}\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{\mathbf{l}}\right] \mid \mathcal{F}_{\mathbf{k}}\right] \; p.\ s.,$$

on dit que la filtration $\left(T^{-\mathbf{i}} \mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ *est dite commutante.*

Exemple

Si $(\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est un champ i.i.d., $T_q\left((\varepsilon_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}\right) := \left(\varepsilon_{\mathbf{i}+\mathbf{e}_{\mathbf{q}}}\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ alors la filtration $\left(\sigma\left(\varepsilon_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \preccurlyeq \mathbf{i}\right)\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ est commutante.

Les ortho-martingales

Définition

Le champ aléatoire $(M_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d}$ *est une ortho-martingale par rapport à la filtration commutante* $\left(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right)_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *si :*

- *pour tout* $\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d$, $M_{\mathbf{n}}$ *est* $\mathcal{F}_{\mathbf{n}}$*-mesurable, intégrable et*
- *pour tout* $\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}_+^d$ *tel que* $\mathbf{i}\preccurlyeq\mathbf{j}$,

$$\mathbb{E}\left[M_{\mathbf{j}}\mid\mathcal{F}_{\mathbf{i}}\right]=M_{\mathbf{i}}.$$

Définition

Le champ aléatoire $(m\circ T^{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^d}$ *est un champ de type accroissements d'ortho-martingales (AOM) si* $(S_{\mathbf{n}}(m))_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}}:=\left(\sum_{\mathbf{0}\preccurlyeq\mathbf{j}\preccurlyeq\mathbf{n}-\mathbf{1}}m\circ T^{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{n}\succcurlyeq\mathbf{1}}$ *est une ortho-martingale.*

Quelques propriétés des ortho-martingales

Soit $\left(m \circ T^{\mathbf{i}}\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ un champ de type AOM. Soit $\mathbf{N} := (N_1, \ldots, N_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d-1}$.

- La suite $\left(S_{\mathbf{N},n}(m)\right)_{n \geqslant 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $\left(\sigma\left(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}, \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d, i_d \leqslant n\right)\right)_{n \geqslant 1}$.
- La suite $\left(M_n\right)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$M_n := \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{N}} \left|S_{\mathbf{i},n}(m)\right|$$

  est une sous-martingale par rapport à la filtration $\left(\sigma\left(T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}, \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d, i_d \leqslant n\right)\right)_{n \geqslant 1}$.
- À l'aide de d applications de l'inégalité maximale de Doob et de l'inégalité de Burkholder, on obtient que pour $p \geqslant 2$,

$$\frac{1}{|\mathbf{K}|^{1/2}} \left\| \max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{K}} \left|S_{\mathbf{i}}(m)\right| \right\|_p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^d (p-1)^{d/2} \left\|m\right\|_p,$$

  avec $|\mathbf{K}| = \prod_{q=1}^{d} K_q$.

Inégalité de déviation pour les ortho-martingales

Théorème (G.)

Soit $(B, \|\cdot\|_B)$ *un espace de Banach séparable* r*-lisse. Pour tout* $1 < p \leqslant r$, $q > p$ *et tout* $d \in \mathbb{N}^*$, *il existe une constante* $C = C(p, q, d, B)$ *telle que pour tout champ aléatoire stationnaire de type AOM* $\left(m \circ T^{\mathbf{i}}, T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ *à valeurs dans* B, *l'inégalité suivante a lieu pour tous* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $x > 0$ *et* $j \in \{1, \ldots, d\}$*:*

$$\mathbb{P}\left\{\max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} \|S_{\mathbf{i}}(m)\|_B > x\,|\mathbf{n}|^{1/p}\right\} \leqslant C \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left\{\|m\|_B > xu\right\} \min\left\{u^{q-1}, u^{p-1}\right\}\left(1 + |\log u|\right)^{d-1} \mathrm{d}u.$$

Inégalité de déviation pour les ortho-martingales

Théorème (G.)

Soit $(B, \|\cdot\|_B)$ *un espace de Banach séparable* r*-lisse. Pour tout* $1 < p \leqslant r$, $q > p$ *et tout* $d \in \mathbb{N}^*$, *il existe une constante* $C = C(p, q, d, B)$ *telle que pour tout champ aléatoire stationnaire de type AOM* $\left(m \circ T^{\mathbf{i}}, T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right)_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^d}$ *à valeurs dans* B, *l'inégalité suivante a lieu pour tous* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, $x > 0$ *et* $j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{n}} \|S_{\mathbf{i}}(m)\|_B > x\,|\mathbf{n}|^{1/p}\right\} \\
&\qquad \leqslant C n_j \int_0^1 \mathbb{P}\left\{\|m\|_B > x u n_j^{1/p}\right\}(1 + |\log u|)^{d-1}\, u^{q-1} \mathrm{d}u \\
&\quad + C \int_0^1 \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}\left[\|m\|_B^p \mid T_j \mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right] > x^p u^p\right\} u^{q-1} (1 + |\log u|)^{d-1}\, \mathrm{d}u \\
&\quad + C \int_1^{+\infty} \mathbb{P}\left\{\mathbb{E}\left[\|m\|_B^p \mid T_j \mathcal{F}_{\mathbf{0}}\right] > x^p u^p\right\} u^{p-1} (1 + |\log u|)^{d-1}\, \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Application

Théorème

Soit $\left(m \circ T^{\mathbf{i}}, T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}, \mathbf{i} \in \mathbb{N}^d\right)$ *be a un champ aléatoire de type AOM à valeurs dans un espace de Banach séparable* r*-lisse* B*. Soit* $1 < p < r$*. Si* $\mathbb{E}\left[|m|^p \left(\log\left(1 + |m|\right)\right)^{d-1}\right] < \infty$ *alors pour tout* $x > 0$*,*

$$\lim_{\max \mathbf{n} \to +\infty} |\mathbf{2^n}|^{p-1} \, \mathbb{P}\left\{\max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{2^n}} \left\|S_{\mathbf{i}}\left(m\right)\right\|_B > |\mathbf{2^n}| \, x\right\} = 0.$$

Application (2)

Théorème (G.)

Soient $p > 2$, B un espace de Banach séparable 2-lisse et $d \geqslant 1$. Il existe une constante $C = C(p, d, B)$ telle que pour tout champ aléatoire $\left(m \circ T^{\mathbf{i}}, T^{-\mathbf{i}}\mathcal{F}_{\mathbf{0}}, \mathbf{i} \in \mathbb{N}^d\right)$ de type AOM à valeurs dans B,

1. *si $m \in \mathbb{L}^{p,\infty}$, alors*

$$\sup_{\mathbf{n} \succcurlyeq \mathbf{1}} |\mathbf{2^n}|^{p/2}\, \mathbb{P}\left\{\max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{2^n}} \|S_{\mathbf{i}}(m)\|_B > |\mathbf{2^n}|\, x\right\} \leqslant C x^{-p} \|m\|_{p,\infty}^p ;$$

2. *si $m \in \mathbb{L}_0^{p,\infty}$ alors pour tout $x > 0$,*

$$\lim_{\max \mathbf{n} \to +\infty} |\mathbf{2^n}|^{p/2}\, \mathbb{P}\left\{\max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{2^n}} \|S_{\mathbf{i}}(m)\|_B > |\mathbf{2^n}|\, x\right\} = 0;$$

3. *si $m \in \mathbb{L}^p$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,*

$$\sup_{\mathbf{n} \succcurlyeq \mathbf{1}} \max_{j \neq i} \sum_{n_i=1}^{+\infty} |\mathbf{2^n}|^{p/2}\, \mathbb{P}\left\{\max_{\mathbf{1} \preccurlyeq \mathbf{i} \preccurlyeq \mathbf{2^n}} \|S_{\mathbf{i}}(m)\|_B > |\mathbf{2^n}|\, x\right\} \leqslant C x^{-p} \mathbb{E}\left[\|m\|_B^p\right].$$

Autres applications

- Convergence complète de tableaux de martingales.

- Étude du processes

$$W_n(f)(t) = \begin{cases} S_k(f) & \text{si } t = k/n, k \in \{0, \ldots, n\}, \\ \text{interpolation affine} & \text{sinon,} \end{cases}$$

dans des espaces fonctionnels : Hölder, Besov.

- Loi des logarithmes itérés.

Autres applications

- Convergence complète de tableaux de martingales.

- Étude du processes

$$W_n(f)(t) = \begin{cases} S_k(f) & \text{si } t = k/n, k \in \{0, \dots, n\}, \\ \text{interpolation affine} & \text{sinon,} \end{cases}$$

dans des espaces fonctionnels : Hölder, Besov.

- Loi des logarithmes itérés.

Merci de votre attention !