Théorème limite central fonctionnel et loi des grands nombres pour des U-statistiques à valeur dans un espace de Hilbert

Davide Giraudo (IRMA, Strasbourg)

Nancy
Séminaire de Probabilités et Statistiques, 16 novembre 2023

Plan

1. *U*-statistiques de données indépendantes
2. Données mélangeantes

Définition des U-statistiques

Afin d'estimer $\mathbb{E}\left[h\left(X,Y\right)\right]$ via une moyenne empirique, où X et Y sont i.i.d. et $h \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la U-statistique de noyau h, définie par

$$U_n := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h\left(X_i, X_j\right), \quad n \geqslant 2,$$

où $\left(X_j\right)_{j \geqslant 1}$ est i.i.d., fut introduite par **Hoeffding** (1948).

On peut prendre comme estimateur U_n / C_n^2, qui est non-biaisé et de variance minimale.

Objectif général : comprendre le comportement asymptotique de U_n.

Notons que pour chaque $i < j$, $h\left(X_i, X_j\right)$ a la même loi que $h\left(X_1, X_2\right)$. La U-statistique U_n peut-être vue comme les sommes partielles des variables aléatoires (non-indépendantes) $D_j := \sum_{i=1}^{j-1} h\left(X_i, X_j\right)$.

Exemple 1 : $h(x,y) = x + y$

On suppose que $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est i.i.d., centrée, $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$ et $h(x,y) = x + y$. Alors

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} h(X_i, X_j) \\ &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) X_i + \sum_{j=2}^{n} (j-1) X_j \\ &= (n-1) \sum_{k=1}^{n} X_k \end{aligned}$$

donc $\left(U_n/n^{3/2}\right)_{n\geqslant 2}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite et $U_n/n^{1+1/p} \to 0$ presque sûrement pour tout $1 \leqslant p < 2$.

Exemple 2 : $h(x,y) = x \cdot y$

On suppose que $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est i.i.d., centrée, $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1$ et $h(x,y) = x \cdot y$. Alors

$$
\begin{aligned}
U_n &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h(X_i, X_j) \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} X_i X_j \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)
\end{aligned}
$$

donc $(2U_n/n)_{n \geqslant 2}$ converge en loi vers $N^2 - 1$, où N est de loi normale centrée réduite et $U_n/n^{2/p} \to 0$ presque sûrement pour tout $1 \leqslant p < 2$.

Le noyau h influe donc sur la normalisation et la loi limite.

Autres exemples de noyaux

On rappelle que

$$U_n := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h(X_i, X_j), \quad n \geqslant 2.$$

1. Estimateur de différence de moyenne de Gini : $h(x, y) = |x - y|$.
2. Estimateur de variance : $h(x, y) := (x - y)^2 / 2$. Alors U_n / C_n^2 fournit un estimateur de la variance.
3. Estimateur de Grassberger-Procaccia : pour $t > 0$ fixé, $h(x, y) = \mathbf{1}\{|x - y| \leqslant t\}$.

Propriété de martingale ?

Soit $D_j := \sum_{i=1}^{j-1} h(X_i, X_j)$ avec $(X_i)_{i \geqslant 0}$ i.i.d.. Alors $U_n = \sum_{j=2}^{n} D_j$. On cherche à savoir si $(D_j)_{j \geqslant 2}$ est une suite d'accroissements d'une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_j)_{j \geqslant 1}$, où $\mathcal{F}_j = \sigma(X_k, 1 \leqslant k \leqslant j)$.
En utilisant l'identité

$$\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F} \vee \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$$

valable si $\mathcal{G}$ est indépendante de $\sigma(Y) \vee \mathcal{F}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[D_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] &= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E}[h(X_i, X_j) \mid \sigma(X_k, 1 \leqslant k \leqslant j-1)] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E}[h(X_i, X_j) \mid \sigma(X_i) \vee \sigma(X_k, 1 \leqslant k \leqslant j-1, k \neq i)] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E}[h(X_i, X_j) \mid \sigma(X_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} h_1(X_i), \text{ avec } h_1(x) = \mathbb{E}[h(x, X_2)]
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}[D_j \mid \mathcal{F}_{j-1}] = 0$ si et seulement si $\mathbb{E}[h(X_1, X_2) \mid X_1] = 0$.

Outil : décomposition d'Hoeffding

Soit $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d.. Soit

$$U_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} h\left(X_i, X_j\right).$$

On définit $\theta := \mathbb{E}\left[h\left(X_1, X_2\right)\right]$,

$$h_1\left(x\right) = \mathbb{E}\left[h\left(x, X_2\right)\right] - \theta, \quad h_2\left(y\right) = \mathbb{E}\left[h\left(X_1, y\right)\right] - \theta,$$

$$h_3\left(x, y\right) = h\left(x, y\right) - h_1\left(x\right) - h_2\left(y\right) - \theta.$$

Alors

$$U_n = C_n^2\theta + \sum_{i=1}^{n-1}\left(n-i\right) h_1\left(X_i\right) + \sum_{j=2}^{n}\left(j-1\right) h_2\left(X_j\right) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} h_3\left(X_i, X_j\right)$$

et

$$\mathbb{E}\left[h_3\left(X_i, X_j\right) \mid X_1, \dots, X_{j-1}\right] = \mathbb{E}\left[h_3\left(X_i, X_j\right) \mid X_{i+1}, \dots, X_n\right] = 0.$$

Cas symétrique

On suppose h symétrique, *i.e.*, $h(x,y) = h(y,x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On a obtenu

$$U_n = C_n^2\theta + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\, h_1(X_i) + \sum_{j=2}^{n}(j-1)\, h_2(X_j) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3(X_i, X_j).$$

La symétrie entraîne que $h_1 = h_2$ donc

$$U_n = C_n^2\theta + (n-1)\sum_{i=1}^{n} h_1(X_i) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3(X_i, X_j).$$

Le terme $(n-1)\sum_{i=1}^{n} h_1(X_i)$ est appelé partie linéaire ; le terme $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3(X_i, X_j)$ partie dégénérée.

On dit que le noyau h est dégénéré si $\mathbb{E}\left[h(X_1, X_2) \mid X_1\right] = 0$ presque sûrement.

Traitement du terme dégénéré

On note $U_n(h_3) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3(X_i, X_j)$ la partie dégénérée.

On utilise la propriété de martingale pour la sommation en i et j et l'inégalité de Burkholder.

- Moment d'ordre 2 : si $(i,j) \neq (k,\ell)$, alors $\mathbb{E}[h_3(X_i, X_j) h(X_k, X_\ell)] = 0$ (on conditionne par rapport à $X_1, \dots, X_{\ell-1}$ si $\ell > j$, ou par rapport à $X_{i+1}, \dots, X_n$ si $i < k$ et on traite les autres cas en échangeant les rôles de (i,j) et (k,ℓ)). Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left[\max_{2 \leqslant n \leqslant N} U_n(h_3)^2\right] \leqslant 4 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \mathbb{E}\left[h_3^2(X_i, X_j)\right] \leqslant KN^2 \mathbb{E}\left[h_3^2(X_1, X_2)\right].$$

- Moments d'ordre $1 < p < 2$:

$$\mathbb{E}\left[\max_{2 \leqslant n \leqslant N} |U_n(h_3)|^p\right] \leqslant K_p N^2 \mathbb{E}\left[|h_3(X_1, X_2)|^p\right].$$

- Moments d'ordre $p > 2$:

$$\mathbb{E}\left[\max_{2 \leqslant n \leqslant N} |U_n(h_3)|^p\right] \leqslant K_p N^p \mathbb{E}\left[|h_3(X_1, X_2)|^p\right].$$

Loi des grands nombres

Proposition (Giné, Zinn (1991))

Soient $(X_i)_{i\geqslant 1}$ *une suite i.i.d. et* $h\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Soit* $1\leqslant p<2$. *On suppose que* $\mathbb{E}\left[\left|h\left(X_1,X_2\right)\right|^p\right]<\infty$.

- *Si* h *est dégénérée pour* $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ($\mathbb{E}\left[h\left(X_1,X_2\right)\mid X_1\right]=0$ *p.s.*), *alors*

$$\frac{1}{n^{2/p}}\left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} h\left(X_i,X_j\right)\right|\to 0 \text{ p.s.}$$

- *Si on suppose simplement que* $\mathbb{E}\left[h\left(X_1,X_2\right)\right]=0$, *alors*

$$\frac{1}{n^{1+1/p}}\left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} h\left(X_i,X_j\right)\right|\to 0 \text{ p.s.}$$

Contrôle de la fonction maximale

Proposition (G. (2021))

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ *une suite i.i.d. et* $h\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *une fonction mesurable. Soit* $1\leqslant p<2$.

- *Si h est dégénérée pour* $(X_i)_{i\geqslant 1}$ ($\mathbb{E}\left[h\left(X_1,X_2\right)\mid X_1\right]=\mathbb{E}\left[h\left(X_1,X_2\right)\mid X_2\right]=0$ *p.s.), alors*

$$t^p\mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{2/p}}\left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}h\left(X_i,X_j\right)\right|>t\right)\leqslant\kappa_p\mathbb{E}\left[\left|h\left(X_1,X_2\right)\right|^p\right].$$

- *Si on suppose simplement que* $\mathbb{E}\left[h\left(X_1,X_2\right)\right]=0$, *alors pour tout* $t>0$,

$$t^p\mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{1+1/p}}\left|\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}h\left(X_i,X_j\right)\right|>t\right)\leqslant\kappa_p\mathbb{E}\left[\left|h\left(X_1,X_2\right)\right|^p\right].$$

Théorème limite central

Si $h(X_1, X_2) \in \mathbb{L}^2$, alors la convergence en loi suivante a lieu

$$\frac{1}{n^{3/2}} \left(U_n - \mathbb{E}\left[U_n\right]\right) \to \sqrt{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h(X_1, X_2) \mid X_1\right]^2\right]} N,$$

où N est de loi normale centrée réduite.

Il est possible que $\mathbb{E}\left[h(X_1, X_2) \mid X_1\right] = 0$ presque sûrement (par exemple si $h(x, y) = xy$ et X_1 est centrée). Si $\mathbb{E}\left[h(X_1, X_2) \mid X_1\right] = 0$, alors la convergence en loi suivante a lieu

$$\frac{1}{n} U_n \to \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \left(N_k^2 - 1\right),$$

où $(N_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de loi normale centrée réduite et $\sum_{k \geqslant 1} \lambda_k^2$ converge.

Théorème limite central fonctionnel

Soit

$$\sigma_n(t) := \left(U_{[nt]} - (nt - [nt])\left(U_{[nt]+1} - U_{[nt]}\right)\right), t \in [0,1], n \geqslant 2,$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Autrement dit, $\sigma_n(k/n) = U_k$ et $t \mapsto \sigma_n(t)$ est continue.

Mandelbaum et Taqqu (1984) :

- Si $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h(X_1, X_2) \mid X_1\right]^2\right] = \sigma^2 > 0$, alors

  $$n^{-3/2}\left(\sigma_n(t) - \mathbb{E}\left[\sigma_n(t)\right]\right) \to \sigma W(t) \text{ en loi dans } C[0,1],$$

  où W est un mouvement brownien standard.
- Si $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h(X_1, X_2) \mid X_1\right]^2\right] = 0$, alors il existe une suite de réels $(a_i)_{i \geqslant 1}$ et une suite de mouvements browniens standard indépendants $\left(B^{(i)}\right)_{i \geqslant 1}$ tels que

  $$n^{-1}\sigma_n(t) \to \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\left(B_t^{(i)}\right)^2 - t\right) \text{ en loi dans } C[0,1].$$

Généralisations des U-statistiques d'ordre deux

1. On peut considérer des U-statistiques d'ordre supérieur : pour $h\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,
$$U_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} h\left(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\right).$$
2. On peut également remplacer h par une fonction dépendant de $(i_1, \dots, i_k)$:
$$U_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} h_{i_1, \dots, i_k}\left(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\right).$$
3. Les variables aléatoires X_i peuvent prendre leur valeurs dans un espace measurable $(S, \mathcal{S})$.

Plan

1 U-statistiques de données indépendantes

2 Données mélangeantes

Objectifs

Soit $h\colon S^2 \to \mathbb{H}$ une fonction mesurable, où (S, d) est un espace métrique séparable et $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert séparable.

1. **Théorème limite central fonctionnel**
   Soit $\mathcal{U}_{n,h}(t)$, $t \in [0,1]$, défini par

$$\mathcal{U}_{n,h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{n^{3/2}} \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \left(h(X_i, X_j) - \mathbb{E}\left[h(X_i, X_j)\right] \right) \right) & \text{si } t = \frac{k}{n} \\ \text{interpolation linéaire} & \text{sur } \left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[. \end{cases}$$

   On étudie la convergence en loi de $\left(\mathcal{U}_{n,h}(\cdot)\right)_{n \geqslant 2}$ dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ avec $(X_i)_{i \geqslant 1}$ strictement stationnaire et vérifiant certaines conditions de dépendance.

2. **Loi des grands nombres**
   On étudie la convergence presque sûre de

$$\frac{1}{n^{1+1/p}} \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(h(X_i, X_j) - \mathbb{E}\left[h(X_i, X_j)\right] \right) \right)$$

   vers 0.

Pourquoi travailler dans un espace de Hilbert/métrique ?

- Certains tests robustes (**Chakraborty et Chaudhuri** (2017) ; **Wegner et Wendler** (2023), **Jiang, Wang et Shao** (2023) **Chakraborty and Chaudhuri** (2015)) se basent sur une généralisation du noyau à valeurs réelles $h(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$, donnée par

$$h \colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\|x-y\|_{\mathbb{H}}} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

- Le fait de travailler avec un espace métrique permet de considérer des données fonctionnelles.

Coefficients de mélange

Étant donnée une suite strictement stationnaire $(X_i)_{i\geqslant 1}$, on définit

$$\beta(k) := \sup_{m\geqslant 1} \beta\left(\sigma\left(X_i, 1 \leqslant i \leqslant m\right), \sigma\left(X_i, i \geqslant m+k\right)\right),$$

où

$$\beta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \frac{1}{2} \sup \left\{ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \left|\mathbb{P}\left(A_i \cap B_j\right) - \mathbb{P}\left(A_i\right)\mathbb{P}\left(B_j\right)\right| \right\},$$

et le supremum est pris sur les partitions finies $(A_i)_{i=1}^{I}, A_i \in \mathcal{A}$ et $(B_j)_{j=1}^{J}, B_j \in \mathcal{B}$.

On définit également

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup\left\{\left|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right|, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\right\}.$$

Théorème limite central fonctionnel

Théorème (G.,2023)

1. *On suppose que h est symétrique et qu'il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $\mathbb{E}\left[\|h(X_1, X_1')\|_{\mathbb{H}}^{2+\delta}\right] < \infty$, *où* X_1' *est une copie indépendante de* X_1 *et* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha\left(\sigma(X_i, i \leqslant 0), \sigma(X_k)\right)^{\delta/(2+\delta)} < \infty$,
2. $\lim_{n\to\infty} n^2 \beta(n) = 0$,
3. $\sup_{j \geqslant 2} \mathbb{E}\left[\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}\right] < \infty$.

Alors la convergence en loi $\mathcal{U}_{n,h}(t) \to W_\Gamma(t)$ *dans* $C_{\mathbb{H}}[0,1]$ *a lieu où* W_Γ *est un processus dont les accroissements* $(W_\Gamma(t_i) - W_\Gamma(t_{i-1}))$ *sont indépendants, gaussiens, et l'opérateur de covariance de* $W_\Gamma(t_i) - W_\Gamma(t_{i-1})$ *est* $(t_i - t_{i-1})\Gamma$, *où*

$$\langle \Gamma u, v \rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}\left[\langle h_1(X_0), u\rangle_{\mathbb{H}} \langle h_1(X_k), v\rangle_{\mathbb{H}}\right], \quad u, v \in \mathbb{H}$$

et $h_1(x) = \mathbb{E}[h(x, X_1)] - \mathbb{E}[h(X_1, X_1')]$.

Comparaison avec des résultats précédents

1. **Yoshihara** (1976) a obtenu un résultat similaire dans le cadre $\mathbb{H} = \mathbb{R}$, mais sous des conditions plus restrictives sur les moments et les coefficients de mélange.

2. **Dehling and Wendler** (2010) ont obtenu une version non-fonctionnelle dans le cas $\mathbb{H} = \mathbb{R}$, mais sous les conditions $\sup_{j \geqslant 2} \mathbb{E}\left[\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}^{2+\delta}\right] < \infty$ et $\beta(n) \leqslant Cn^{-1-2/\delta-\eta}$ pour un certain $\eta > 0$. Cette dernière condition est plus restrictive si $\delta < 2$.

Loi des grands nombres avec un moment d'ordre plus grand que 2

Théorème (G., 2023)

Soit $1 < p < 2$. *On suppose que* $\sup_{j \geqslant 2} \mathbb{E}\left[\left\|h\left(X_1, X_j\right)\right\|_{\mathbb{H}}\right] < \infty$, *qu'il existe* $\delta \geqslant 2 - p$ *tel que* $\mathbb{E}\left[\left\|h\left(X_1, X_1'\right)_{\mathbb{H}}\right\|^{p+\delta}\right] < \infty$, *où* X_1' *est une copie indépendante de* X_1, *et qu'il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma(p,\delta,\eta)} \beta\left(k\right) < \infty,$$

où

$$\gamma\left(p, \delta, \eta\right) = \max\left\{p - 1 + \eta, p - 2 + \frac{p\left(p-1\right)}{\delta}\right\}.$$

Alors la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{1+1/p}} \left\|U_n\left(h\right)\right\|_{\mathbb{H}} = 0 \text{ p.s.}.$$

Loi des grands nombres avec un moment d'ordre < 2

Théorème (G., 2023)

Soit $1 < p < 2$. On suppose que $\sup_{j \geqslant 2} \mathbb{E}\left[\left\|h(X_1, X_j)_{\mathbb{H}}\right\|_{\mathbb{H}}\right] < \infty$, qu'il existe $0 < \delta < 2 - p$ tel que $\mathbb{E}\left[\|h(X_1, X_1')\|_{\mathbb{H}}^{p+\delta}\right] < \infty$, où X_1' est une copie indépendante de X_1 et qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma(p,\delta)} \beta(k) < \infty,$$

où

$$\gamma(p,\delta) = \max\left\{p - 2 + \frac{p(p-1)}{\delta}, \frac{p(p-1) + (p-1)\delta}{p(p-1) + (p+1)\delta}\right\}.$$

Alors la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+1/p}} \|U_n(h)\|_{\mathbb{H}} = 0 \ p.s..$$

Dehling, Sharipov (2009) : avec $\gamma(p,\delta)$ replacé par $\max\{p - 2 + p(p-1)/\delta, 1\}$, $\mathbb{H} = \mathbb{R}$ et h symétrique.

Loi des grands nombres, cas dégénéré

Théorème (G., 2023)

Soit $1 < p < 2$. *On suppose que* $\sup_{j \geqslant 2} \mathbb{E}\left[\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}\right] < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[h\left(X_1, X_1'\right) \mid X_1\right] = \mathbb{E}\left[h\left(X_1, X_1'\right) \mid X_1'\right] = 0,$$

$\mathbb{E}\left[\|h(X_1, X_1')\|_{\mathbb{H}}^2\right] < \infty$, *où* X_1' *est une copie indépendante de* X_1 *et qu'il existe* $\eta > 0$ *tel que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{2(p-1)}{2-p} + \eta} \beta(k) < \infty.$$

Alors la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{2/p}} \|U_n(h)\|_{\mathbb{H}} = 0 \text{ p.s..}$$

Loi des grands nombres, cas dégénéré, $p+\delta<2$

Théorème (G., 2023)

Soit $1<p<2$. *On suppose que* $\sup_{j\geqslant 2}\mathbb{E}\left[\left\|h\left(X_1,X_j\right)\right\|_{\mathbb{H}}\right]<\infty$,

$$\mathbb{E}\left[h\left(X_1,X_1'\right)\mid X_1\right]=\mathbb{E}\left[h\left(X_1,X_1'\right)\mid X_1'\right]=0,$$

où X_1' *est une copie indépendante de* X_1, *il existe* $\delta>0$ *tel que* $\mathbb{E}\left[\left\|h\left(X_1,X_1'\right)_{\mathbb{H}}\right\|^{p+\delta}\right]<\infty$, *où* X_1' *est une copie indépendante de* X_1, *et*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-1+\frac{p(p-1)}{\delta}}\beta\left(k\right)<\infty.$$

Alors la convergence suivante a lieu :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2/p}}\left\|U_n\left(h\right)\right\|_{\mathbb{H}}=0\ p.s..$$

Idée globale de démonstration (1)

La convergence de la partie linéaire est garantie par des résultats existants : **Dedecker et Merlevède** (2003, 2006).

1. Pour le théorème limite central fonctionnel, il suffit de montrer que
$$\frac{1}{N^{3/2}} \max_{2 \leqslant n \leqslant N} \left\| \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3 \left(X_i, X_j \right) \right\|_{\mathbb{H}} \to 0 \text{ en probabilité.}$$
2. Pour la loi des grands nombres, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\sum_{M=0}^{\infty} \mathbb{P} \left(2^{-M\left(1+\frac{1}{p}\right)} \max_{2 \leqslant n \leqslant 2^M} \left\| \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3 \left(X_i, X_j \right) \right\|_{\mathbb{H}} > \varepsilon \right) < \infty$$
dans le cas non dégénéré ; dans le cas dégénéré, on remplace $1 + 1/p$ par $2/p$.

Idée globale de démonstration (2)

Pour q fixé, on exprime $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3(X_i, X_j)$ comme une U-statistique basée sur les vecteurs

$$V_{k,u} := (X_{2uq+k+1}, \dots, X_{2qu+k+q+1}), \quad -q \leqslant k \leqslant q,$$

plus des termes de restes.
On peut trouver, à k fixé, des vecteurs $V^*_{k,u}$ tels que

- pour chaque $u \geqslant 1$, $V_{k,u}$ a la même loi que $V^*_{k,u}$;
- $\mathbb{P}\left(V_{k,u} \neq V^*_{k,u}\right) \leqslant \beta(q)$ et
- $\left(V^*_{k,u}\right)_{u \geqslant 1}$ est indépendante.

En posant $H = \|h(X_1, X_1')\|_{\mathbb{H}}$, on obtient, pour $r \geqslant 2$, $R, x > 0$ et $1 \leqslant q \leqslant N/2$:

$$\mathbb{P}\left(\max_{2 \leqslant n \leqslant N} \left\| \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_3(X_i, X_j) \right\|_{\mathbb{H}} > x\right) \leqslant C_r x^{-r} q^r N^r \mathbb{E}\left[H^r \mathbf{1}_{H \leqslant R}\right]$$
$$+ C_r x^{-1} N^2 \mathbb{E}\left[H \mathbf{1}_{H > R}\right] + C_r x^{-1} q N \sup_{j \geqslant 2} \mathbb{E}\left[\|h(X_1, X_j)\|_{\mathbb{H}}\right] + 4N\beta(q).$$

Perspectives

1. Traitement des U-statistiques incomplètes :

$$U_n^{\text{inc}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{n,i,j} h\left(X_i, X_j\right),$$

où $\left(a_{n,i,j}\right)_{1 \leqslant i < j}$ est i.i.d. et indépendante de $\left(X_i\right)_{i \geqslant 1}$ et $a_{n,i,j}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n.

2. Traitement des U-statistiques d'ordre supérieur : pour $h \colon S^k \to \mathbb{H}$,

$$U_n = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} h\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}\right).$$