U-statistiques portant sur des moments empiriques d'une suite stationnaire dépendante

Groupe de travail de Statistique, Rouen
Davide Giraudo (Université de Strasbourg)
en collaboration avec Herold Dehling et Sara Schmidt

19 décembre 2024

Plan

Contexte

On dispose d'un échantillon $x_1, \ldots, x_n$ issu de réalisations de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ telles que

$$X_i = \sigma\left(\frac{i}{n}\right) Y_i + \mu\left(\frac{i}{n}\right),$$

où $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite dépendante, centrée, de variance 1, $\mu\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et $\sigma\colon [0,1] \to [\sigma_0, +\infty[$ est càdlàg et $\sigma_0 > 0$.

Dans l'article de **Schmidt, Wornowizki, Fried et Dehling** (2021), les auteurs chercher à tester l'hypothèse où σ est constante, égale à un certain σ_H, contre l'alternative d'une fonction non constante. Sous l'hypothèse de variance constante, $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu\left(i/n\right)$ et $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \sigma_H^2$.

Quantification de la dépendance

Dans l'article de **Schmidt, Wornowizki, Fried et Dehling** (2021), la dépendance de la suite $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ est quantifiée via les coefficients de β-mélange.

$$\beta(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left|\mathbb{P}(A_i\cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B_j)\right|\right\},$$

où le supremum est pris sur les partitions finies $(A_i)_{i=1}^{I}$ et $(B_j)_{j=1}^{J}$ de Ω constituées respectivement d'éléments des tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, On associe à une suite strictement stationnaire $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ ces coefficients de β-mélange en posant

$$\beta(k) := \sup_{\ell\geqslant 1}\beta\left(\mathcal{F}_1^{\ell},\mathcal{F}_{\ell+k}^{\infty}\right),$$

où $\mathcal{F}_u^v$, $1\leqslant u\leqslant v\leqslant +\infty$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires Y_i, $u\leqslant i\leqslant v$ ($u\leqslant i$ pour $v=\infty$).
Des conditions sur les innovations et les racines associées à un processus ARMA garantissent $\beta(k)\leqslant Ca^k$ avec $0<a<1$. Il en va de même pour certains processus GARCH ou certaines fonctions de chaînes de Markov.

Statistique de test

Afin de tester la constance de la variance, on définit

$$U(n) = \frac{1}{b_n (b_n - 1)} \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant b_n} \left| \log \widehat{\sigma}^2_{j,n} - \log \widehat{\sigma}^2_{k,n} \right| ,$$

avec

$$\widehat{\sigma}^2_{j,n} = \frac{1}{\ell_n} \sum_{i=(j-1)\ell_n+1}^{j\ell_n} \left(X_i - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r=(j-1)\ell_n+1}^{j\ell_n} X_r \right)^2 .$$

ℓ_n désigne la taille des blocs et b_n leur nombre, de sorte que $b_n \ell_n \sim n$. Sous l'hypothèse de l'existence de $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[|X_1|^{4+\delta} \right] < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \beta(k)^{\delta/(2+\delta)} < \infty$ et $\ell_n = n^s$ avec $s \in]0,5;0,75[$, les auteurs ont montré que la convergence en probabilité suivante a lieu :

$$U(n) \to \int_0^1 \int_0^1 \left| \log\left(\sigma^2(x)\right) - \log\left(\sigma^2(y)\right) \right| dxdy.$$

Comportement de $(U(n))$

Sous l'hypothèse nulle, σ est constante. Ainsi, $\int_0^1 \int_0^1 \left|\log\left(\sigma^2(x)\right) - \log\left(\sigma^2(y)\right)\right| dxdy = 0$ alors que sous l'alternative, ce dernier terme n'est pas nul.

En effectuant l'hypothèse supplémentaire de l'existence d'une suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $m_n = o\left(n^{2s-1}\right)$ et $b_n\beta(m_n) \to 0$, les auteurs ont montré la convergence en probabilité

$$\frac{\sqrt{\ell_n}}{\kappa} U(n) \to \frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

où

$$\kappa^2 = \mathrm{Var}\left(Y_1^2\right) + 2\sum_{k=2}^{\infty} \mathrm{Cov}\left(Y_1^2, Y_k^2\right).$$

Théorème limite central

Sous des hypothèses supplémentaires sur les coefficients de mélange et sur le $s \in]0,5; 0,75[$ tel que $\ell_n = n^s$, Schmidt, Wornowizki, Fried et Dehling ont montré, sous l'hypothèse de constance de la variance, la convergence en loi

$$\sqrt{b_n}\left(\frac{\sqrt{\ell_n}}{\kappa}U(n) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \to \mathcal{N}\left(0, \frac{4}{3} + \frac{8}{\pi}\left(\sqrt{3} - 2\right)\right).$$

Pour mettre en place un test, il faut estimer κ défini par

$$\kappa^2 = \mathrm{Var}\left(Y_1^2\right) + 2\sum_{k=2}^{\infty}\mathrm{Cov}\left(Y_1^2, Y_k^2\right).$$

Pour cela, les auteurs utilisent un sous-échantillonage en se basant sur le fait que

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i^2 - \mathbb{E}\left[Y_1^2\right]\right)\right|\right] \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}\kappa.$$

Estimation de κ

Cependant, seul les X_i sont observés. Les auteurs considèrent $\widetilde{b}_n$ blocs de taille de $\widetilde{\ell}_n$, centrent les X_i

$$\widetilde{X}_i := X_i - \frac{1}{\widetilde{\ell}_n} \sum_{r=(j-1)\widetilde{\ell}_n+1}^{j\widetilde{\ell}_n} X_r, \quad (j-1)\,\widetilde{\ell}_n + 1 \leqslant i \leqslant j\widetilde{\ell}_n$$

puis posent

$$\widehat{\sigma}_H^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i^2$$

et

$$\widehat{\kappa} = \frac{1}{\widetilde{b}_n \widehat{\sigma}_H^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{j=1}^{\widetilde{b}_n} \left| \frac{1}{\sqrt{\widetilde{\ell}_n}} \sum_{i=(j-1)\widetilde{\ell}_n+1}^{j\widetilde{\ell}_n} \left(X_i^2 - \widehat{\sigma}_H^2\right) \right|.$$

Des conditions sur $\widetilde{b}_n$, $\widetilde{\ell}_n$, la dépendance et les moments de $(Y_i)_{i\geqslant 1}$ garantissent la convergence en probabilité vers 0 de la suite $\left(\sqrt{\widetilde{b}_n}\,(\widehat{\kappa} - \kappa)\right)$.

Plan

Introduction

Nous considérons des *U*-statistiques dont les données sont constituées des moments empiriques de blocs d'une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ s'exprimant comme une fonctionnelle d'une suite i.i.d.. Pour n fixé, nous considérons b_n blocs

$$B_{n,j} := [\![(j-1)\ell_n + 1, j\ell_n]\!], \quad j \in [\![1, b_n]\!] := \{1, 2, \dots, b_n\}$$

de taille ℓ_n, que l'on suppose tendre vers l'infini. Un facteur d'échelle $\sqrt{\ell_n}$ et certaines hypothèses sur la régularité de $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ permettent d'établir la normalité asymptotique de

$$W_{n,j} := \sqrt{\ell_n} g\left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{i\in B_{n,j}} X_i, \frac{1}{\ell_n} \sum_{i\in B_{n,j}} X_i^2, \dots, \frac{1}{\ell_n} \sum_{i\in B_{n,j}} X_i^m \right). \qquad (1)$$

U-statistiques mises en jeu

On s'intéresse alors à des U-statistiques du type

$$U_n := \frac{1}{b_n\left(b_n - 1\right)} \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant b_n} h\left(W_{n,j}, W_{n,k}\right),$$

qui apparaissent naturellement dans des tests non-paramétriques de la constance d'un paramètre au sein de la suite $\left(X_i\right)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Schmidt, Wornowizki, Fried et Dehling (2021) ont testé la constance de la variance en considérant les moyennes de Gini des différences des logarithmes des variances sur chaque bloc, *i.e.*, ils ont pris $h(x, y) = |x - y|$ et

$$W_{n,j} = \sqrt{\ell_n} \log \left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{t=(j-1)\ell_n+1}^{j\ell_n} \left(X_t - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r=(j-1)\ell_n+1}^{jl\ell_n} X_r \right)^2 \right).$$

Schmidt (2024) a testé le changement de moyenne à l'aide des moyennes de Gini des moyennes empiriques des blocs $W_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{\ell_n}} \sum_{t \in B_{n,j}} X_t$. Dans ces travaux, le comportement asymptotique de la statistique de test est déterminé grâce à un théorème limite central pour U_n.

Motivation

Dans un travail réalisé en collaboration avec Herold Dehling et Sara Schmidt, nous considérons des moments empiriques d'ordre supérieur, ce qui permet de tester la constance des caractéristiques d'ordre supérieur de la loi de X_i, comme la dissymétrie ou le kurtosis. Nous nous intéressons à des U-statistiques de la forme

$$U_n := \frac{1}{b_n\left(b_n-1\right)} \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant b_n} h\left(W_{n,j}, W_{n,k}\right),$$

où $h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction symétrique pour laquelle il existe une constante C telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\left|h\left(x,y\right)\right| \leqslant C\left(1+|x|+|y|\right).$$

Un théorème limite central pour des U-statistiques de blocs indépendants

Nous présentons tout d'abord un résultat général pour U_n, sous l'hypothèse que le tableau de variables aléatoires $(W_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant b_n, n\geqslant 1}$ est tel que pour chaque $n \geqslant 1$, $(W_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant b_n}$ est i.i.d. avec des hypothèses relativement simples sur $W_{n,j}$.

Théorème (Dehling, G., Schmidt (2023))

Soit $(W_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant b_n, n\geqslant 1}$ un tableau de variables aléatoires tel que pour chaque $n \geqslant 1$, $(W_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant b_n}$ est i.i.d. et $b_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. On suppose que $|h(x,y)| \leqslant C(1 + |x| + |y|)$ est vérifiée, que $\gamma_n^2 := \mathrm{Cov}\left(h(W_{n,1}, W_{n,2}), h(W_{n,2}, W_{n,3})\right) > 0$, et que la suite $\left(W_{n,1}^2/\gamma_n^2\right)_{n\geqslant 1}$ est uniformément intégrable. Alors la convergence en loi suivante a lieu

$$\frac{\sqrt{b_n}}{\gamma_n}\left(\frac{1}{b_n(b_n-1)}\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant b_n} h(W_{n,j}, W_{n,k}) - \mathbb{E}\left[h(W_{n,1}, W_{n,2})\right]\right) \to 2\mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ est de loi normale centrée réduite.

Mesure de dépendance (1)

Contrairement aux tableaux triangulaires de variables aléatoires du théorème précédents, les tableaux triangulaires concernés $(W_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant b_n, n\geqslant 1}$ ne sont pas indépendants car les variables aléatoires $W_{n,j}$ se basent sur des variables aléatoires issues d'une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ qui est dépendante.

Plus précisément, nous supposons que la suite strictement stationnaire $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ peut s'exprimer comme fonction d'une suite i.i.d., *i.e.*, $X_i := f\left((\varepsilon_{i-u})_{u\in\mathbb{Z}}\right)$, où $f : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ est mesurable et $(\varepsilon_u)_{u\in\mathbb{Z}}$ est i.i.d.

Afin de quantifier la dépendance, nous considérons une suite $(\varepsilon'_u)_{u\in\mathbb{Z}}$, qui est une copie indépendante de $(\varepsilon_u)_{u\in\mathbb{Z}}$ et nous définissons

$$\delta_i\left((X_j)_{j\in\mathbb{Z}}\right) := \left\|X_0 - X_0^{*,i}\right\|_2,$$

où $X_0^{*,i} = f\left(\left(\varepsilon_{-u}^{*,i}\right)_{u\in\mathbb{Z}}\right)$ et $\varepsilon_v^{*,i} = \varepsilon'_i$ si $v = i$ et $\varepsilon_v^{*,i} = \varepsilon_v$ sinon.

Mesure de dépendance (2)

Nous mesurons donc la contribution de ε_i dans l'expression de X_0 en calculant la norme de la différence entre X_0 et sa version couplée $X_0^{*,i}$ pour laquelle la variable aléatoire ε_i est remplacée par ε_i'. Cette mesure de dépendance fut introduite dans **Wu** (2005) sous le terme de *physical dependence measure* et est de nos jours utilisée dans de nombreuses applications statistiques.

Dans la suite, le tableau triangulaire $(W_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant b_n, n\geqslant 1}$ sera de la forme

$$W_{n,j} = \sqrt{\ell_n} g \left(\frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in B_{n,j}} X_i, \frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in B_{n,j}} X_i^2, \ldots, \frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in B_{n,j}} X_i^m \right).$$

Premier exemple de fonction g

Donnons des exemples de quantités mettant en jeu les moments d'une loi qui peuvent être traités par notre approche. **Schmidt, Wornowizk, Fried et Dehling** (2021) ont proposé dans un test de constance de variance basé sur la statistique de test

$$U_n = \frac{1}{b_n(b_n-1)} \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant b_n} \sqrt{\ell_n} \left| \log s_{n,j}^2 - \log s_{n,k}^2 \right| ,$$

où $s_{n,j}^2 := \sum_{i \in B_{n,j}} \left(X_i - \frac{1}{\ell_n} \sum_{r \in B_{n,j}} X_r \right)^2$. Dans notre cadre, cela correspond à $m = 2$, $g\left(x_1, x_2\right) = \log\left(x_2 - x_1^2\right)$ et $h\left(x, y\right) = \left|x - y\right|$.

Deuxième exemple de fonction g

En considérant les moments d'ordre supérieur il est possible de mettre en place un test de dissymétrie ou de changement de kurtosis en considérant les moyennes de Gini (donc $h(x, y) = |x - y|$) d'estimateurs des blocs $\hat{\gamma}_{n,j}$, $j = 1, \ldots, b_n$, ou $\hat{\kappa}_{n,j}$, $j = 1, \ldots, b_n$, respectivement. Une version empirique de la dissymétrie est

$$\hat{\gamma}_{n,j} = \frac{\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}}\left(X_t - \frac{1}{\ell_n}\sum_{r\in B_{n,j}} X_r\right)^3}{\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}}\left(X_t - \frac{1}{\ell_n}\sum_{r\in B_{n,j}} X_r\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t^3 - 3\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t^2\right)\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t\right) + 2\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t\right)^3}{\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t^2 - \left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t\right)^2\right)^{3/2}},$$

qui est traitée dans notre cadre par

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3 - 3x_1x_2 + 2x_1^3}{\left(x_2 - x_1^2\right)^{3/2}}.$$

Troisième exemple de fonction g

Une version empirique du kurtosis est donnée par

$$\hat{\kappa}_{n,j} = \frac{\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}}\left(X_t - \frac{1}{\ell_n}\sum_{r\in B_{n,j}} X_r\right)^4}{\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}}\left(X_t - \frac{1}{\ell_n}\sum_{r\in B_{n,j}} X_r\right)^2\right)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t^2 - \left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t\right)^2\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t^4 - 4\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t\right)\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t^3\right)\right.$$

$$\left. + 6\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t\right)^2\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t^2\right) - 3\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{t\in B_{n,j}} X_t\right)^4\right),$$

qui correspond à la fonction

$$g\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \frac{x_4 - 4x_1x_3 + 6x_1^2x_2 - 3x_1^4}{\left(x_2 - x_1^2\right)^2}.$$

Conditions pour la convergence de la U-statistique

1. La fonction h est lipschitzienne.
2. $\mathbb{E}\left[X_1^{2m}\right] < \infty$ et
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{m} i^2 \delta_i \left(\left(X_j^k \right)_{j\in\mathbb{Z}} \right) < \infty.$$
3. La fonction g vérifie $g\left(v_0\right) = 0$, où $v_0 = \left(\mathbb{E}\left[X_1^k\right] \right)_{k=1}^{m} \in \mathbb{R}^m$. Il existe $a > 0$ tel que g est dérivable en tout point de $\prod_{k=1}^{m} \left(\mathbb{E}\left[X_1^k\right] - 2a, \mathbb{E}\left[X_1^k\right] + 2a \right)$ et le gradient de g est borné sur $\prod_{k=1}^{m} \left(\mathbb{E}\left[X_1^k\right] - 2a, \mathbb{E}\left[X_1^k\right] + 2a \right)$.
4. Les suites $\left(b_n\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\ell_n\right)_{n\geqslant 1}$ tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini. De plus, la suite $\left(b_n/\ell_n\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Théorème (Dehling, G., Schmidt (2023))

On suppose que les conditions précédentes sont vérifiées.
Soit $\eta\colon \mathbb{R}^m \to [0,1]$ *une fonction de classe* C^∞ *telle que* $\eta(x) = 1$ *si* $\|x - v_0\|_2 \leqslant a$ *et* $\eta(x) = 0$ *si* $\|x - v_0\|_2 > 2a$, *et posons*

$$W_{n,j}^{(\eta)} := \sqrt{\ell_n}\,(g \cdot \eta)\left(\left(\frac{1}{\ell_n}\sum_{i \in B_{n,j}} X_i^k\right)_{k=1}^m\right).$$

Si

$$\sigma^2 := \sum_{t \in \mathbb{Z}} \operatorname{Cov}\left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_k}(v_0)\, X_0^k, \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_k}(v_0)\, X_t^k\right) > 0,$$

alors la convergence en loi suivante a lieu

$$\sqrt{b_n}\left(U_n - \frac{1}{b_n(b_n - 1)} \sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant b_n} \mathbb{E}\left[h\left(W_{n,j}^{(\eta)}, W_{n,k}^{(\eta)}\right)\right]\right) \to 2\gamma\mathcal{N},$$

où

$$\gamma^2 := \operatorname{Cov}\left(h\left(\sigma\mathcal{N}, \sigma\mathcal{N}'\right), h\left(\sigma\mathcal{N}, \sigma\mathcal{N}''\right)\right)$$

et $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$ *et* $\mathcal{N}''$ *sont des variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite.*

Autre expression de γ et commentaire sur le centrage

Remarquons que par symétrie de h, γ^2 admet l'expression

$$\gamma^2 = \mathrm{Cov}\left(h\left(\sigma\mathcal{N}, \sigma\mathcal{N}'\right), h\left(\sigma\mathcal{N}', \sigma\mathcal{N}''\right)\right).$$

Le centrage de U_n par $\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant b_n} \mathbb{E}\left[h\left(W_{n,j}, W_{n,k}\right)\right]$ plutôt que sa version tronquée $\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant b_n} \mathbb{E}\left[h\left(W_{n,j}^{(\eta)}, W_{n,k}^{(\eta)}\right)\right]$ semble plus naturel. Cependant, les conditions du théorème principal ne garantissent pas la finitude de $\mathbb{E}\left[\left|h\left(W_{n,j}, W_{n,k}\right)\right|\right]$.

Exemples de suites dépendantes

Donnons à présent des exemples de suites de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ vérifiant la condition

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{m} i^2\delta_i\left(\left(X_j^k\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right) < \infty.$$

Nous supposons que X_i s'exprime comme une fonction höldérienne d'un processus linéaire :

$$X_i := \varphi\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\varepsilon_{i-j}\right),$$

où $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ estγ-höldérienne pour un certain $\gamma\in]0,1]$, $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels telle que $\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2\left|a_j\right|^\gamma < \infty$ et $(\varepsilon_u)_{u\in\mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d. telle que $\mathbb{E}\left[\left|\varepsilon_0\right|^{2m\gamma}\right] < \infty$. Alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifie la condition

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k=1}^{m} i^2\delta_i\left(\left(X_j^k\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right) < \infty.$$

2e exemple de suites dépendantes

Nous supposons que X_i s'exprime comme une fonction d'un processus linéaire gaussien : soit $X_i = \varphi(Y_i)$ avec

$$Y_i := \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \varepsilon_{i-j},$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\varepsilon_u)_{u \in \mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d., ε_0 a une loi normale centrée réduite et $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une suite de réels telle que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_j| < \infty$ et $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j^2 = 1$. Si $\varphi(Y_0) \in \mathbb{L}^2$ et $\mathbb{E}[\varphi(Y_0)] = 0$, alors le développement suivant a lieu :

$$\varphi(Y_i) = \sum_{q=1}^{\infty} c_q(\varphi) H_q(Y_i),$$

où H_q désigne le q-ième polynôme d'Hermite, défini par

$$H_q(x) := (-1)^q \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^q}{dx^q} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

et

$$c_q(\varphi) := \frac{1}{q!} \mathbb{E}\left[\varphi(Y_0) H_q(Y_0)\right].$$

La condition sur la dépendance est vérifiée si $\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^2 |a_j| < \infty$ et $\sum_{k=1}^{m} \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt{q \cdot q!} \left| c_q\left(\varphi^k - \mathbb{E}\left[\varphi^k(Y_0)\right]\right) \right| < \infty$.

3e exemple de suites dépendantes

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus de Volterra, défini par

$$X_i := \sum_{j,j'\in\mathbb{Z}, j\neq j'} a_{j,j'}\varepsilon_{i-j}\varepsilon_{i-j'},$$

où $(\varepsilon_u)_{u\in\mathbb{Z}}$ est i.i.d. et centrée, $\mathbb{E}\left[\varepsilon_0^2\right] < \infty$ et $\sum_{j,j'\in\mathbb{Z},j\neq j'} a_{j,j'}^2 < \infty$. Si $\mathbb{E}\left[\varepsilon_0^{2m}\right] < \infty$ et

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2 \sqrt{\sum_{j'\in\mathbb{Z},j'\neq j} \left(a_{j,j'}^2 + a_{j',j}^2\right)} < \infty,$$

alors $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ vérifie la condition

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{m} i^2 \delta_i\left(\left(X_j^k\right)_{j\in\mathbb{Z}}\right) < \infty.$$

Commentaire sur le terme de centrage

La démonstration du théorème principal repose sur une approximation de la U-statistique de départ par celle dont les tableaux $W_{n,j}$ sont remplacés par une fonction des moments empiriques de blocs de la suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ approximée par des suites m-dépendantes.

En imposant des conditions supplémentaires sur la fonction g, les coefficients de dépendance de la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, et les suites $(b_n)_{n \geqslant 1}$ et $(\ell_n)_{n \geqslant 1}$, il est possible de remplacer le terme de centrage s'exprimant à l'aide des $W_{n,j}^{(\eta)}$ par une expression qui ne nécessite pas de troncature.

Autre terme de centrage

Proposition

On suppose que les conditions du théorème principal sont vérifiées. Nous supposons de plus que toutes les dérivées partielles du second ordre de g *en* v_0 *existent et qu'il existe* $\kappa \in]0,1[$ *tel que* $b_n/\ell_n^{1-\kappa} \to 0$ *et* $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{k=1}^{m} |i|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\kappa}} \delta_i \left(\left(X_t^k \right)_{t\in\mathbb{Z}} \right) < \infty$. *Alors la convergence en loi suivante a lieu :*

$$\sqrt{b_n} \left(U_n - \mathbb{E}\left[h\left(Z_n, Z_n' \right) \right] \right) \to 2\gamma\mathcal{N},$$

où

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{\ell_n}} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_k} (v_0) \sum_{t=1}^{\ell_n} \left(X_t^k - \mathbb{E}\left[X_1^k \right] \right)$$

et Z_n' *est une copie indépendante de* Z_n.

Commentaire sur le centrage

Le terme de centrage est plus simple à traiter que celui mis en jeu dans le théorème présenté.

Cependant, si nous souhaitons utiliser U_n comme statistique de test pour tester la constance du paramètre $g\left(\mathbb{E}\left[X_t\right], \mathbb{E}\left[X_t^2\right], \ldots, \mathbb{E}\left[X_t^m\right]\right)$, il faut une quantité calculable.

Sous certaines conditions supplémentaires sur les moments, la taille et le nombre de blocs ainsi que la dépendance, il est possible de remplacer $\mathbb{E}\left[|Z_n - Z_n'|\right]$ par $\sigma\,\mathbb{E}\left[|N - N'|\right] = 2\,\sigma/\sqrt{\pi}$. Le paramètre restant σ peut être estimé à l'aide des procédures habituelles.

Un terme de centrage plus simple

Corollaire

On suppose que la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *peut s'exprimer comme un décalage de Bernoulli unilatéral, c'est-à-dire,* $X_i = f\left((\varepsilon_{i-u})_{u\geqslant 0}\right)$*. Nous supposons de plus qu'il existe* $2 < p \leqslant 3$ *tel que*

1. $\mathbb{E}\left[|X_1|^{p\cdot m}\right] < \infty$ *et*

$$\sum_{i\geqslant 0}\sum_{k=1}^{m}\left(i^2\delta_{i,p}\left((X_t^k)_{t\in\mathbb{Z}}\right) + i^{5/2}\delta_{i,2}\left((X_t^k)_{t\in\mathbb{Z}}\right)\right) < \infty,$$

   où $\delta_{i,p}((X_t)_{t\in\mathbb{Z}}) := \left\|X_0 - X_0^{*,i}\right\|_p$, *et*

2. $\sqrt{b_n}\ell_n^{1-p/2}(\log \ell_n)^{p/2} + \sqrt{b_n/\ell_n} \to 0.$

En notant

$$U_n := \frac{1}{b_n(b_n-1)}\sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant b_n}\left|W_{n,j} - W_{n,k}\right|,$$

où $W_{n,j}$ *est définie comme dans* (1)*, la convergence en loi suivante a lieu :*

$$\sqrt{b_n}\left(U_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\right) \longrightarrow 2\gamma\mathcal{N},$$

La démonstration de ce corollaire nécessite la convergence de $\sqrt{b_n}\left(\mathbb{E}\left[|Z_n - Z_n'|\right] - \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)$ vers 0, qui elle-même s'appuie sur une vitesse de convergence dans le théorème limite central pour les décalages bernoulliens donné dans le Corollaire 2.6 dans **Jirak** (2016).

Plan

Aspects pratiques

Le travail fait peut être complété par des simulations de taux de rejets dans le cas d'introduction artificielle d'un changement de mesure de symétrie ou de kurtosis via un test reposant sur la convergence

$$\sqrt{b_n}\Big(U_n - \frac{2\sigma}{\sqrt{\pi}}\Big) \longrightarrow 2\gamma\mathcal{N}$$

lorsque l'hypothèse est vérifiée.

La mise en place de la procédure présentée sur un jeu de données réelles peut être effectuée.

Autres estimateurs ?

Nous avons considéré des moments empiriques sur les blocs $\left(X_{(j-1)\ell_n+1}, \ldots, X_{j\ell_n}\right)$. Ceux-ci ont l'avantage de bénéficier, sous certaines conditions, d'une propriété de normalité asymptotique et d'uniforme intégrabilité, qui se sont avérées primordiales dans les démonstrations.

Cependant, ce ne sont pas les seuls estimateurs à avoir ces propriétés. On pourrait envisager d'autres estimateurs, comme celui de Hill par exemple.