Critères projectifs garantissant le théorème limite central fonctionnel pour des champs aléatoires stationnaires

Séminaire systèmes dynamiques, probabilités et statistique, Brest

Davide Giraudo (Université de Strasbourg)

4 avril 2025

Plan

Contexte

On étudie la convergence de sommes partielles d'une suite strictement stationnaire.

Représentation : $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \left(f \circ T^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ où $T : \Omega \to \Omega$ est inversible et préserve la mesure.

But : étudier la convergence des sommes partielles $S_n(f) := \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$, adéquatement centrées et normalisées.

Théorème ergodique de Birkhoff : si $f \in \mathbb{L}^1$, alors la suite $(S_n(f)/n)_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{I}]$, où $\mathcal{I}$ est la collection des invariants, autrement dit, les ensembles A tels que $T^{-1}A = A$.

Accroissements de martingale

Une suite d'accroissements d'une martingale est une suite $\left(D_0 \circ T^i\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ où D_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ vérifie $T\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$ et $\mathbb{E}\left[D_0 \mid T\mathcal{F}_0\right] = 0$. Ainsi, en posant $D_i = D_0 \circ T^i$ et $\mathcal{F}_i = T^{-i}\mathcal{F}_0$, $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements d'une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Soit

$$W_n(f,t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} S_k(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{k-1} f \circ T^i & \text{si } t = k/n; \\ \text{interpolation linéaire} & \text{sur } \left] \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right[. \end{cases}$$

Billingsley, Ibragimov (1962) : si $\left(D_0 \circ T^i\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements d'une martingale et $\mathbb{E}\left[D_0^2\right] < +\infty$, alors $\left(W_n(D_0, t), t \in [0,1]\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi dans $C([0,1])$ vers $\left(\sqrt{\mathbb{E}\left[D_0^2 \mid \mathcal{I}\right]} W_t, t \in [0,1]\right)$, où $(W_t, t \in [0,1])$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{I}$.

Décomposition martingale-cobord

On suppose que f est $\mathcal{F}_0$-mesurable et peut être décomposée sous la forme

$$f = D_0 + g - g \circ T, \quad D_0, g \in \mathbb{L}^2,$$

où $\left(D_0 \circ T^i\right)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite strictement stationnaire d'accroissements d'une martingale. C'est le cas si $\sup_{n \geqslant 1} \left\| \mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0\right] \right\|_2 < +\infty$ (voir **Cuny** (2015)).

Gordin (1969) : $\left(W_n(f,t), t \in [0,1]\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi dans $C([0,1])$ vers $(\eta W_t, t \in [0,1])$, où $(W_t, t \in [0,1])$ est un mouvement brownien indépendant de η, qui est $\mathcal{I}$-mesurable.

Condition de Hannan

On suppose que f est mesurable par rapport à $\sigma\left(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_i\right)$, que $\lim_{i\to-\infty}\left\|\mathbb{E}\left[f\mid\mathcal{F}_i\right]\right\|_2=0$ et

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left\|P_i\left(f\right)\right\|_2<\infty,\quad P_i\left(f\right)=\mathbb{E}\left[f\mid\mathcal{F}_i\right]-\mathbb{E}\left[f\mid\mathcal{F}_{i-1}\right].$$

Hannan (1978) : $\left(W_n\left(f,t\right),t\in[0,1]\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi dans $C\left([0,1]\right)$ vers $\left(\eta W_t,t\in[0,1]\right)$, où $\left(W_t,t\in[0,1]\right)$ est un mouvement brownien indépendant de η, qui est $\mathcal{I}$-mesurable.

Condition de Maxwell et Woodroofe

Maxwell et Woodroofe (2000) ont montré que si f est $\mathcal{F}_0$-mesurable et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left\| \mathbb{E}\left[S_n(f) \mid \mathcal{F}_0 \right] \right\|_2 < \infty,$$

alors $\left(n^{-1/2} S_n(f)\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers $\eta \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est de loi normale standard et indépendante de η, qui est $\mathcal{I}$-mesurable.

Peligrad, Utev (2005) ont montré que le théorème limite central fonctionnel a lieu : $\left(W_n(f,t), t \in [0,1]\right)_{n \geqslant 1}$ converge en loi dans $C([0,1])$ vers $(\eta W_t, t \in [0,1])$, où $(W_t, t \in [0,1])$ est un mouvement brownien indépendant de η, qui est $\mathcal{I}$-mesurable.

Volný (2007) a donné une version de cette condition lorsque f n'est pas nécessairement $\mathcal{F}_0$-mesurable.

Approche commune

Pour f que l'on suppose $\mathcal{F}_0$-mesurable, on pose

$$f_K = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[f \circ T^k \mid \mathcal{F}_0\right].$$

Alors $f - f_K$ admet une décomposition martingale-cobord. Ainsi

$$f = D_K + g_K - g_K \circ T + f_K.$$

Sous les conditions de Hannan et Maxwell-Woodroofe, on peut montrer que $(D_K)_{K \geqslant 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$ et que la contribution de f_K est négligeable grâce à des inégalités de moments de la forme

$$\left\| \max_{1 \leqslant n \leqslant N} |S_n(h)| \right\|_2 \leqslant 2 \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|P_i(h)\|_2, \quad P_i(h) = \mathbb{E}[h \mid \mathcal{F}_i] - \mathbb{E}[h \mid \mathcal{F}_{i-1}]$$

$$\left\| \max_{1 \leqslant n \leqslant N} |S_n(h)| \right\|_2 \leqslant C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \|\mathbb{E}[S_n(h) \mid \mathcal{F}_0]\|_2.$$

Comparaison des conditions

Durieu (2009) a montré que dans tout système dynamique d'entropie strictement positive, il existe une fonction f vérifiant exactement une des conditions

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left\|P_i\left(f\right)\right\|_2 < \infty, \quad P_i\left(f\right) = \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_i\right] - \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{i-1}\right].$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left\|\mathbb{E}\left[S_n\left(f\right) \mid \mathcal{F}_0\right]\right\|_2 < \infty.$$

Application des conditions projectives

On peut vérifier les conditions projectives lorsque $\left(f \circ T^i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un processus linéaire :

$$f \circ T^i = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k D \circ T^{i-k},$$

où $\left(D \circ T^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements d'une martingale et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k^2 < +\infty$.

Hannan : $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| < \infty$

Maxwell-Woodroofe : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sqrt{\sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+\ell}\right)^2} < \infty.$

D'autres applications concernent les fonctions de certaines chaînes de Markov.

Plan

Introduction aux champs aléatoires (1)

Par champ aléatoire, on entend une collection de variables aléatoires indexées par $\mathbb{Z}^d$, où $d \in \mathbb{N}^*$.

Dans la suite, bien que les résultats aient lieu en dimension d, nous n'évoquerons que les champs en dimension 2.

On considère des applications inversibles $T^{1,0}$ et $T^{0,1}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui commutent et préservent $\mathbb{P}$. On peut alors définir $T^{i,j} = \left(T^{1,0}\right)^i \circ \left(T^{0,1}\right)^j$.

Par exemple, on peut considérer $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et

$$T^{i,j}\left(\omega_1, \omega_2\right) = \left(T_1^i \omega_1, T_2^j \omega_2\right).$$

Introduction aux champs aléatoires (2)

Un autre exemple : $T^{i,j}$ est l'opérateur de décalage sur les suites de réels indexées par $\mathbb{Z}^2$.

Pour tout $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $\left(f \circ T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire.

On s'intéresse à la convergence en loi des sommes partielles sur des rectangles

$$S_{m,n}(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f \circ T^{i,j},$$

c'est-à-dire à la convergence de $S_{m,n}(f)$ adéquatement normalisée lorsque $\min\{m,n\} \to +\infty$.

On peut s'intéresser à une version fonctionnelle :

$$W_{m,n}(f,s,t) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^{\lfloor ms\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor} f \circ T^{i,j}, \quad s,t \in [0,1].$$

Difficultés liée à la dimension supérieure

Les difficultés dans les travaux sur les champs aléatoires ne sont pas uniquement d'ordre technique.

- Comment définir ce qui joue le rôle de martingales ?
- Caractérisation des processus limites plus délicate.
- Obtention d'inégalités maximales pour l'équi-tension.

Martingales pour l'ordre lexicographique

Dedecker (1998) a considéré des martingales pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{Z}^2$ et leurs sommations sur certains sous ensembles de $\mathbb{Z}^2$. Un critère projectif a été donné. Il garantit la convergence des sommes partielles normalisée vers $\eta\mathcal{N}$, où η et $\mathcal{N}$ sont indépendantes, η est mesurable pour la tribu des invariants et $\mathcal{N}$ de loi normale standard.

Cohen (2016) a montré que si $\left(D_{0,0} \circ T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est un champ d'accroissements de martingales pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{Z}^2$ et que la tribu des invariants est triviale, alors

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} S_{m,n}\left(D_{0,0}\right) \to \|D_{0,0}\|_2 \mathcal{N} \text{ quand } \min\{m,n\} \to +\infty.$$

Si de plus $T^{1,0}$ et $T^{0,1}$ sont ergodiques, alors

$$\frac{1}{\sqrt{mn}} S_{m,n}\left(D_{0,0}\right) \to \|D_{0,0}\|_2 \mathcal{N} \text{ quand } \max\{m,n\} \to +\infty.$$

Martingales au sens de Basu et Dorea

On peut également considérer des accroissements de martingales $\left(D_{0,0} \circ T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}} = (D_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ définis par

$$\mathbb{E}\left[D_{i,j} \mid \sigma\left(D_{u,v}, u \leqslant i-1 \text{ ou } v \leqslant j-1\right)\right] = 0.$$

Basu et Dorea (1979) et **Poghosyan, Roelly** (1998) ont montré que si $\left(T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est une action ergodique et que $\left(D_{0,0} \circ T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements de martingales au sens précédent avec $\mathbb{E}\left[D_{0,0}^2\right] = 1$, alors

$$W_{m,n}(f,s,t) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^{\lfloor ms \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} f \circ T^{i,j}, \quad s,t \in [0,1].$$

converge en loi, lorsque $\min\{m,n\} \to +\infty$, vers un drap brownien standard $(W(s,t))_{s,t\in[0,1]}$: un processus gaussien, centré, et

$$\operatorname{Cov}\left(W(s,t), W\left(s',t'\right)\right) = \min\left\{s,s'\right\} \min\left\{t,t'\right\}.$$

Martingales à indice multiple, filtrations

On souhaite utiliser une propriété de martingale par rapport à l'indice i aussi par rapport à j. On considérera des filtrations de la forme $(\mathcal{F}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ où $\mathcal{F}_{i,j} = T^{-i,-j}\mathcal{F}_{0,0}$ et vérifiant $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}_{i',j'}$ si $i \leqslant i'$ et $j \leqslant j'$ et

$$\forall Y \in \mathbb{L}^1, \quad \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{i,j}\right] \mid \mathcal{F}_{k,\ell}\right] = \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{F}_{\min\{i,k\},\min\{j,\ell\}}\right].$$

On dit alors que $(\mathcal{F}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est une filtration commutante.

Par exemple :

- $\mathcal{F}_{i,j} = \sigma\left(\varepsilon_{u,v}, u \leqslant i, v \leqslant j\right)$ avec $(\varepsilon_{u,v})_{u,v\in\mathbb{Z}}$ i.i.d.
- $\mathcal{F}_{i,j} = \mathcal{G}_i \vee \mathcal{G}'_j$, où $(\mathcal{G}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $\left(\mathcal{G}'_j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ sont des filtrations et pour tous i et j, $\mathcal{G}_i$ est indépendante de $\mathcal{G}'_j$.

Martingales à indice multiple, définitions

Soit $(\mathcal{F}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ une filtration commutante, où $\mathcal{F}_{i,j} = T^{-i,-j}\mathcal{F}_{0,0}$.

On dit que $(D_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est un champ aléatoire de type accroissement d'orthomartingale si $D_{i,j}$ est $\mathcal{F}_{i,j}$-mesurable et

$$\mathbb{E}\left[D_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i-1,j}\right] = \mathbb{E}\left[D_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i,j-1}\right] = 0.$$

Ainsi, pour m, n fixés, en posant

$$D_i^{(1)} := \sum_{j=1}^{n} D_{i,j},$$

$$D_j^{(2)} := \sum_{i=1}^{m} D_{i,j},$$

$\left(D_i^{(1)}\right)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $\left(D_j^{(2)}\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ sont des suites d'accroissements d'une martingale.

Théorème limite central fonctionnel pour les orthomartingales (1)

Volný (2015) a montré que si $T^{1,0}$ ou $T^{0,1}$ est ergodique, alors $\left(D_{0,0} \circ T^{i,j}\right)_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est une suite d'accroissements de martingales au sens précédent avec $\mathbb{E}\left[D_{0,0}^2\right] = 1$, alors

$$W_{m,n}\left(D_{0,0}, s, t\right) = \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{i=1}^{\lfloor ms \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor} D_{0,0} \circ T^{i,j}, \quad s, t \in [0,1].$$

converge en loi, lorsque $\min\{m, n\} \to +\infty$, vers un drap brownien standard $\left(W\left(s,t\right)\right)_{s,t \in [0,1]}$.

Volný (2019) a étendu en partie ce résultat dans le cas où aucun des décalages $T^{1,0}$ ou $T^{0,1}$ n'est ergodique : $S_{m,n}\left(D_{0,0}\right)/\sqrt{mn}$ converge en loi vers $\eta\mathcal{N}$ avec η indépendante de $\mathcal{N}$ et $\left(W_{m,n}\left(D_{0,0}, s, t\right)\right)$ converge dans $D\left([0,1]^2\right)$.

Théorème limite central fonctionnel pour les orthomartingales (2)

Dans **G., Lesigne, Volný** (2025+), nous avons montré que si $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ et

$$T^{i,j}(\omega_1, \omega_2) = \left(T_1^i \omega_1, T_2^j \omega_2\right),$$

alors

$$W_{m,n}(D_{0,0}, s, t) \to \sum_{k,\ell=1}^{+\infty} a_{k,\ell} B_k^{(1)}(s) B_\ell^{(2)}(t),$$

où $\left(B_k^{(1)}\right)_{k \geqslant 1}$, $\left(B_\ell^{(2)}\right)_{\ell \geqslant 1}$ sont des familles indépendantes de mouvements browniens indépendants et $\sum_{k,\ell=1}^{+\infty} a_{k,\ell}^2 < \infty$.

Théorème limite central fonctionnel pour les orthomartingales (3)

Dans **G., Lesigne, Volný** (2025+), nous avons montré l'équivalence (pour $d = 2$) entre les assertions suivantes.

1. Il existe un champ aléatoire de type AOM $\left(D_{0,0} \circ T^{i,j}\right)_{i,j \geqslant 1}$ tel que la limite en loi quand $\min\{m, n\} \to \infty$ de $(mn)^{-1/2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} D_{0,0} \circ T^{i,j}$ n'est pas normale.
2. La transformation $T^{1,0}$ est d'entropie strictement positive pour $\mathcal{I}_2$ et la transformation $T^{0,1}$ est d'entropie strictement positive pour $\mathcal{I}_1$.

Condition de Hannan en dimension 2

Volný et Wang (2014) ont montré que si f est $\mathcal{F}_{0,0}$-mesurable,

$$\left\|\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{-\infty,0}\right]\right\|_2 = 0 = \left\|\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{0,-\infty}\right]\right\|_2, \quad \mathcal{F}_{-\infty,0} = \bigcap_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{\ell,0}, \mathcal{F}_{0,-\infty} = \bigcap_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_{0,\ell}$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \left\|\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{i,j}\right] - \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{i-1,j}\right] - \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{i,j-1}\right] + \mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{i-1,j-1}\right]\right\|_2 < \infty$$

et une des applications $T^{1,0}$ ou $T^{0,1}$ est ergodique, alors $W_{m,n}(f,\cdot)$ converge dans $D\left([0,1]^2\right)$ vers un drap brownien quand $\min\{m,n\} \to \infty$.

Condition de Maxwell et Woodroofe en dimension 2

Soit $U^{i,j}$ tel que $U^{i,j}f(\omega) = f\left(T^{i,j}\omega\right)$. **G.** (2018) : si f est $\mathcal{F}_{0,0}$-mesurable, la condition

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(mn)^{3/2}} \left\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[U^{i,j}f \mid \mathcal{F}_{0,0}\right] \right\|_2 < +\infty$$

garantit l'existence d'un champ aléatoire $\left(D_{0,0} \circ T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ de type accroissement d'orthomartingale tel que

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{M,N\geqslant R} \frac{1}{\sqrt{MN}} \left\| \max_{\substack{1\leqslant m\leqslant M \\ 1\leqslant n\leqslant N}} \left|S_{m,n}(f) - S_{m,n}(D_{0,0})\right| \right\|_2 = 0.$$

En particulier, si $T^{1,0}$ ou $T^{0,1}$ est ergodique, alors $(W_{m,n}(s,t))_{s,t\in[0,1]}$ converge en loi dans $D([0,1])$ vers une constante fois un mouvement brownien standard.

Approche commune (1)

Rappel en dimension 1 : soit $f_K = K^{-1}\sum_{k=1}^{K}\mathbb{E}\left[f\circ T^k \mid \mathcal{F}_0\right]$. Alors $f - f_K = D_K + G_K - G_K\circ T$, où $\left(D_K\circ T^i\right)_{i\geqslant 1}$ est une suite d'accroissements d'une martingale.

En dimension $d = 2$:

$$f - f_K = f - \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\mathbb{E}\left[f\circ T^{i,0}\mid \mathcal{F}_{0,0}\right] - \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}\mathbb{E}\left[f\circ T^{0,j}\mid \mathcal{F}_{0,0}\right] + \frac{1}{K^2}\sum_{i,j=1}^{K}\mathbb{E}\left[f\circ T^{i,j}\mid \mathcal{F}_{0,0}\right],$$

et on a alors la décomposition

$$f - f_K = D_{0,0}^{(K)} + \left(\mathrm{Id} - U^{1,0}\right)g_1^{(K)} + \left(\mathrm{Id} - U^{0,1}\right)g_2^{(K)} + \left(\mathrm{Id} - U^{1,0}\right)\left(\mathrm{Id} - U^{0,1}\right)g_{1,2}^{(K)}.$$

Approche commune (2)

Des inégalités de moments montrent que f_K a une contribution négligeable. Pour Hannan

$$\left\| \max_{\substack{1 \leqslant m \leqslant M \\ 1 \leqslant n \leqslant N}} \left| S_{m,n}(h) \right| \right\|_2$$

$$\leqslant C \sum_{i,j=0}^{\infty} \left\| \mathbb{E}\left[h \mid \mathcal{F}_{i,j}\right] - \mathbb{E}\left[h \mid \mathcal{F}_{i-1,j}\right] - \mathbb{E}\left[h \mid \mathcal{F}_{i,j-1}\right] + \mathbb{E}\left[h \mid \mathcal{F}_{i-1,j-1}\right] \right\|_2 < \infty,$$

et pour Maxwell et Woodroofe :

$$\left\| \max_{\substack{1 \leqslant m \leqslant M \\ 1 \leqslant n \leqslant N}} \left| S_{m,n}(h) \right| \right\|_2 \leqslant C \sum_{m,n=1}^{+\infty} \frac{1}{(mn)^{3/2}} \left\| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}\left[U^{i,j} h \mid \mathcal{F}_{0,0}\right] \right\|_2,$$

où C est une constante numérique.

Autres résultats

- **Lin, Merlevède et Volný** (2022) ont établi un théorème limite central à l'aide d'une décomposition martingale-cobord dans $\mathbb{L}^1$ et des conditions supplémentaires.
- **Cuny, Dedecker et Merlevède** (2025+) ont établi un théorème limite central fonctionnel sous des conditions portant sur $\|\mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_{-k,0}]\|_2$, $\|\mathbb{E}[f \mid \mathcal{F}_{0,-k}]\|_1$ et la queue de f.

Plan

Idée de la condition

On cherche à exploiter les différentes coordonnées pour formuler une condition dans l'esprit de Hannan dans un direction et celui de la condition de Maxwell et Woodroofe dans l'autre.

On est amené à poser

$$\Delta(f) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left\| \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1} U^{i,0} f \mid \mathcal{F}_{0,\ell} \right] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1} U^{i,0} f \mid \mathcal{F}_{0,\ell-1} \right] \right\|_2$$

et on peut montrer sous certaines conditions l'existence de C telle que pour toute fonction h,

$$\left\| \max_{\substack{1 \leqslant m \leqslant M \\ 1 \leqslant n \leqslant N}} \left| S_{m,n}(h) \right| \right\|_2 \leqslant C \Delta(h) .$$

Ceci mène au ...

Énoncé

Théorème (G. (2025+))

Soit $\left(T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ *une action de* $\mathbb{Z}^2$ *qui préserve la mesure et* $\left(T^{-i,-j}\mathcal{F}_0\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ *une filtration commutante. Soit* f *une fonction mesurable pour* $\mathcal{F}_{0,\infty}$ *et telle que* $\mathbb{E}\left[f \mid \mathcal{F}_{0,-\infty}\right] = 0$. *On suppose que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \left\| \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1} U^{i,0} f \mid \mathcal{F}_{0,\ell}\right] - \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{k-1} U^{i,0} f \mid \mathcal{F}_{0,\ell-1}\right] \right\|_2 < \infty.$$

Alors il existe un champ aléatoire de type accroissement de martingale $\left(D_{0,0}\circ T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ *tel que*

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{M,N\geqslant R} \frac{1}{\sqrt{MN}} \left\| \max_{\substack{1\leqslant m\leqslant M\\ 1\leqslant n\leqslant N}} \left|S_{m,n}(f) - S_{m,n}(D_{0,0})\right| \right\|_2 = 0.$$

Applications : champs linéaires

On suppose que

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_{k,\ell} \varepsilon_{-k,-\ell},$$

où $(\varepsilon_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ est i.i.d. Si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{i+k,\ell} \right)^2} < +\infty,$$

alors il existe un champ aléatoire de type accroissement de martingale $\left(D_{0,0} \circ T^{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{Z}}$ tel que

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{M,N \geqslant R} \frac{1}{\sqrt{MN}} \left\| \max_{\substack{1 \leqslant m \leqslant M \\ 1 \leqslant n \leqslant N}} \left| S_{m,n}(f) - S_{m,n}(D_{0,0}) \right| \right\|_2 = 0.$$

et $W_{m,n}(f)$ converge lorsque $\min\{m, n\} \to +\infty$ vers une constante fois un drap brownien standard.

Plan

Perspectives

- Fournir une condition projective dans le même esprit qui garantirait :
  - la loi des grands nombres, sur des rectangles ou des carrés,
  - la loi des logarithmes itérés bornée.
- Donner une caractérisation explicite des processus limites possibles pour le processus sommes partielles.