

Contrôle continu 1

Tous les documents sont interdits, la calculatrice et le téléphone portable sont interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 60 minutes

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$ et $\alpha > 0$.

1. Rappeler l'expression de la densité de X .
2. Quelle est la loi de $X + 1$?
3. Soit $Y_\alpha := (X + 1)^\alpha$. Déterminer la fonction de répartition de Y_α .
4. Déterminer la densité de Y_α .
5. Calculer l'espérance et la variance de Y_α .

Exercice 2

Soit (X_1, X_2) le vecteur aléatoire de densité

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = c \cdot x_1 \mathbf{1}_{0 < x_1 < x_2 < 1}.$$

1. Déterminer c telle que $f_{(X_1, X_2)}$ soit effectivement une densité.
2. Déterminer la densité de X_1 , son espérance et sa variance.
3. Déterminer la densité de X_2 , son espérance et sa variance.
4. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer la densité conditionnelle de X_1 sachant $X_2 = x_2$.
6. Déterminer (uniquement à partir de la définition) la densité conditionnelle de X_2 sachant $X_1 = x_1$.
7. Déterminer $\mathbb{E}[X_1 \mid X_2 = x_2]$ ainsi que $\mathbb{E}[X_1 \mid X_2]$.
8. Rappeler la formule de Bayes pour les densités conditionnelles et la vérifier sur le couple (X_1, X_2) de cet exercice.