

Contrôle continu 3

Tous les documents sont interdits, la calculatrice et le téléphone portable sont interdits et doivent rester dans votre sac. Chaque réponse devra être clairement justifiée pour être validée.

Durée de l'épreuve : 120 minutes
Le sujet est recto-verso.

Exercice 1

On considère des variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n qui sont de loi uniforme sur $[\theta, \theta+2]$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est inconnu. On considère les estimateurs suivants du paramètre θ :

$$\widehat{\theta}_n^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i,$$
$$\widehat{\theta}_n^{(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - 1.$$

1. Déterminer la loi de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$.
2. Calculer le biais de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ ainsi que celui de $\widehat{\theta}_n^{(2)}$.
3. Calculer l'erreur quadratique moyenne de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$, puis celle de $\widehat{\theta}_n^{(2)}$.
4. Étudier la convergence presque sûre des estimateurs $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(2)}$.

Exercice 2

Pour un réel $p > 3$ fixé, on considère des variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n , ayant toutes pour densité

$$f_p(x) = (p-1) \theta^{p-1} (x+\theta)^{-p} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Le paramètre $\theta > 0$ est inconnu, mais $p > 3$ est connu.

1. Vérifier que f_p est bien une densité.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ en fonction de p et de θ .

3. En déduire un estimateur de θ de la forme $c_p \bar{X}_n = c_p \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ où c_p est à déterminer de sorte que cet estimateur soit sans biais. On notera $\hat{\theta}_n$ cet estimateur.
4. Calculer l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_n$.
5. Calculer l'efficacité de $\hat{\theta}_n$.
6. Pour $t \in]0, 1[$ donné, fournir une valeur de $p > 3$ pour laquelle l'estimateur $\hat{\theta}_n$ correspondant à cette valeur de p a une efficacité égale à t .

Exercice 3

Soit $X = (X_1, X_2, X_3)^\top$ un vecteur gaussien centré de dimension 3 ayant pour matrice de covariance Σ donnée par

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, donner la loi de X_i .
2. Déterminer la loi de $X_2 - 2X_1$.
3. Déterminer $\mathbb{E}[X_3 \mid X_2]$ ainsi que $\mathbb{E}[(X_3 - \mathbb{E}[X_3 \mid X_2])^2]$.
4. Déterminer $\mathbb{E}[X_3 \mid X_1, X_2]$ ainsi que $\mathbb{E}[(X_3 - \mathbb{E}[X_3 \mid X_1, X_2])^2]$.
5. On admet que si $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}[Z^4] = 3\sigma^4$. La variable aléatoire $Y := (X_1 + 4X_2)X_1$ est-elle de loi normale ? On pourra montrer que $X_1 + 4X_2$ est indépendante de X_1 puis calculer $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[Y^2]$ et $\mathbb{E}[Y^4]$.
6. **Question bonus** Déterminer la loi du vecteur $(X_1 - X_2, X_2 + X_3)$.